



# éduscol



Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe de première  
générale et technologique

---

Mathématiques  
Physique-chimie

Série STL

Ces documents peuvent être utilisés et modifiés librement dans le cadre des activités d'enseignement scolaire, hors exploitation commerciale.

Toute reproduction totale ou partielle à d'autres fins est soumise à une autorisation préalable du Directeur général de l'enseignement scolaire.

La violation de ces dispositions est passible des sanctions édictées à l'article L.335-2 du Code de la propriété intellectuelle.

août 2012

## Sommaire

---

Introduction .....	2
1. Cinétique : suivi temporel d'une synthèse chimique et vitesse de réaction .....	3
A. Le principe.....	3
B. La situation expérimentale .....	4
C. Première approche : modélisation discrète et notion de suite .....	4
D. Seconde approche : modélisation continue et dérivation .....	6
2. Dosage pH-métrique .....	8
A. Le principe.....	8
B. Exploitation mathématique.....	9
3. Lentilles minces .....	11
A. Le principe.....	11
B. Détermination de la distance focale image $f'$ d'une lentille mince par la méthode de Bessel .....	12
C. Une situation mettant en œuvre la loi binomiale et la notion d'intervalle de fluctuation .....	13
4. Nombre d'ouverture d'un objectif photographique .....	15
A. Le principe.....	15
B. Le travail mathématique : modélisation par une suite géométrique .....	16
5. Évaluation de l'exposition d'une photo numérique.....	17
A. Le principe.....	17
B. Travail statistique .....	18
6. Codage binaire d'une transmission ADSL.....	22
A. Le principe.....	22
B. Reconnaissance d'une loi binomiale et évaluation des erreurs d'une transmission ADSL .....	24

## Introduction

---

Le programme de mathématiques des classes de première des séries STI2D et STL, paru au [Bulletin officiel spécial n° 3 du 17 mars 2011](#), suggère que les activités proposées en classe et hors du temps scolaire puissent prendre appui, lorsque cela est possible, sur la résolution de problèmes, essentiellement en lien avec d'autres disciplines. Il y est également mentionné de privilégier, le plus possible, une approche des notions nouvelles par l'étude de situations concrètes, l'appropriation des concepts se faisant alors d'abord au travers d'exemples avant d'aboutir à des développements théoriques, à effectuer dans un deuxième temps.

Il s'agit donc de développer les capacités des élèves à mobiliser des méthodes mathématiques appropriées au traitement de situations scientifiques et, plus largement, à les former à la pratique d'une démarche scientifique. L'utilisation de logiciels et d'outils de visualisation, de calcul (scientifique ou formel) et de programmation, doit non seulement favoriser ce type de démarche mais également conduire à une plus grande synergie entre les enseignements de mathématiques et de physique-chimie.

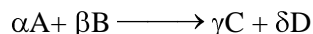
Ce document propose une série de problèmes élaborés en étroite collaboration avec des enseignants de physique-chimie. Certains thèmes, assez riches, pourront servir de situations d'appui pour introduire, en fil rouge, différentes notions du programme. D'autres thèmes, d'objectifs plus limités, pourront être exploités comme des supports ponctuels à l'apprentissage des élèves. Pour chaque situation abordée, les principes de physique ou de chimie sont préalablement exposés.

## 1. Cinétique : suivi temporel d'une synthèse chimique et vitesse de réaction

Mathématiques		Physique Chimie	
Contenus	Capacités attendues	Notions et contenus	Capacités
Suites Mode de génération d'une suite numérique  Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point où elle est dérivable.	Modéliser et étudier une situation simple à l'aide de suites. Mettre en œuvre un algorithme permettant de calculer un terme de rang donné. Exploiter une représentation graphique des termes d'une suite.  Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé. Calculer la dérivée de fonctions.	Amélioration des cinétiques de synthèse. Facteurs cinétiques	Effectuer expérimentalement le suivi temporel d'une synthèse chimique

### A. Le principe

On introduit dans un vase réactionnel un mélange équimolaire d'une solution contenant deux réactifs A et B donnant après réaction deux produits C et D ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont les valeurs absolues des nombres stœchiométriques<sup>1</sup>).



La cinétique de cette réaction est suivie en déterminant la concentration du réactif A, notée [A], restant dans le mélange réactionnel au cours du temps. Le mélange liquide garde un volume constant.

La **loi de Van't Hoff** (XIX<sup>ème</sup> siècle, premier prix Nobel de chimie en 1901), précise que pour un *acte élémentaire* en milieu homogène, la vitesse de la réaction chimique est, à chaque instant, proportionnelle au produit des concentrations des réactifs, chaque concentration étant portée à une puissance égale à la valeur absolue du nombre stœchiométrique correspondant.

$$v = k \cdot [A]^\alpha \cdot [B]^\beta \quad k \text{ est appelée constante de vitesse de la réaction}$$

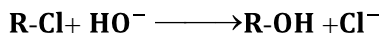
Un *acte élémentaire* est une réaction dont l'équation représente la réalité microscopique (choc efficace entre réactifs qui conduit aux produits)

<sup>1</sup> <http://goldbook.iupac.org/S06025.html>

## B. La situation expérimentale

On traite le 2-chlorobutane par des ions hydroxydes  $\text{HO}^-$  dans l'eau, en maintenant la température constante.

Dans ces conditions le dérivé chloré, noté **R-Cl**, subit une substitution nucléophile d'ordre 2 (acte élémentaire) dont l'équation de la réaction est la suivante :



Si les concentrations des deux réactifs sont égales initialement, alors, à chaque instant  $t$ , elles seront aussi égales (car les deux réactifs ont le même nombre stœchiométrique) et donc, la vitesse de réaction sera proportionnelle au carré de la concentration du réactif  $[\text{R-Cl}]$ .

En effet,  $\alpha = \beta = 1$  d'où  $v = k \cdot [\text{R-Cl}] \cdot [\text{HO}^-] = k \cdot [\text{R-Cl}]^2$

La vitesse de disparition des réactifs est définie comme l'opposé de la dérivée par rapport au temps de la concentration en **R-Cl** :

$$v = -\frac{d[\text{R-Cl}]}{dt}$$

Finalement :

$$v = k \cdot [\text{R-Cl}]^2 = -\frac{d[\text{R-Cl}]}{dt}$$

La concentration en  $\text{mol.L}^{-1}$  du réactif **R-Cl** a été mesurée durant deux heures. Un extrait des résultats est donné dans le tableau ci-dessous<sup>3</sup> :

$t$ minutes	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$[\text{R-Cl}]$ $\text{mol.L}^{-1}$	0,500	0,357	0,277	0,227	0,192	0,167	0,147	0,131	0,119	0,109	0,101	0,093	0,086

## C. Première approche : modélisation discrète et notion de suite

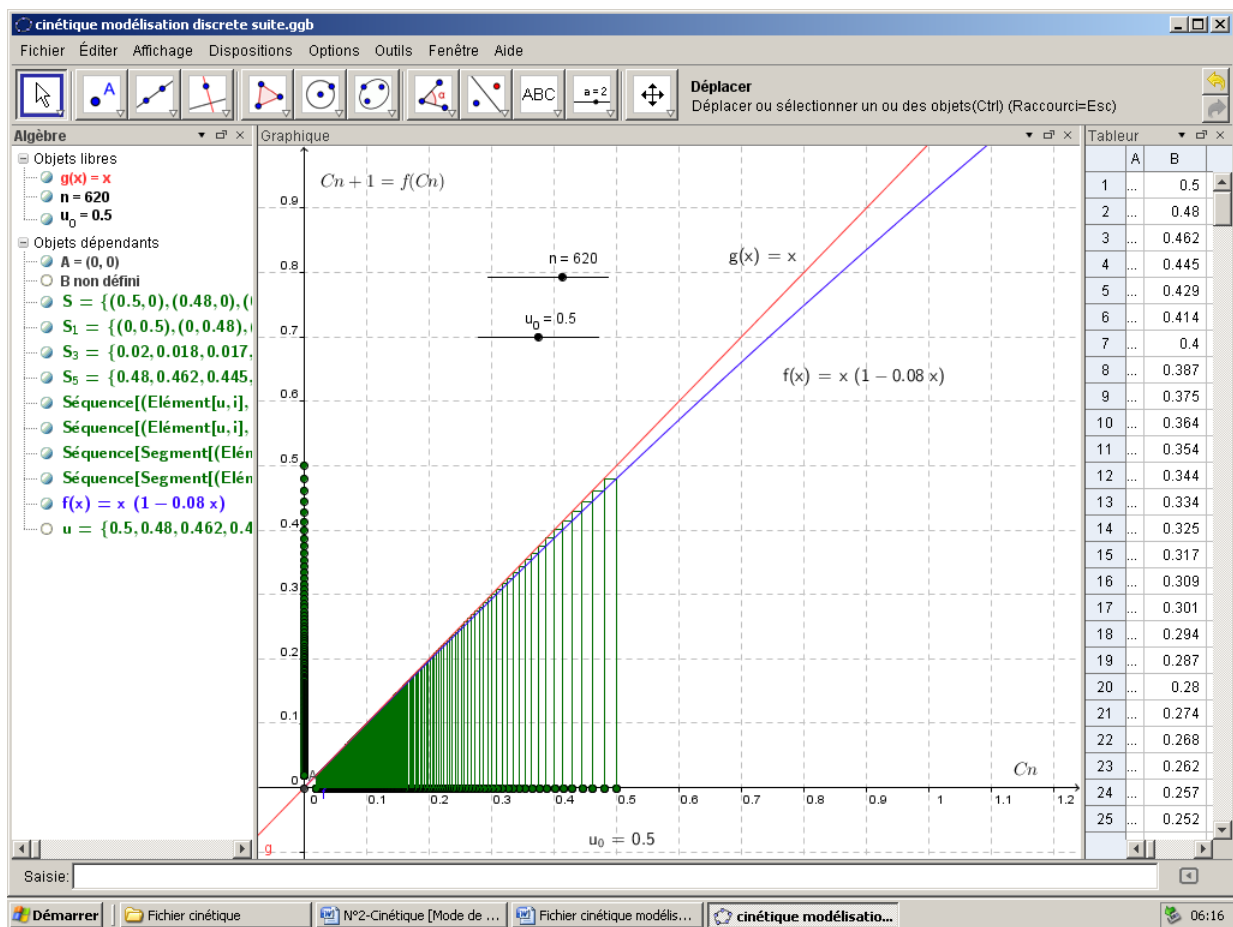
On note  $C_n$  la concentration en  $\text{mol.L}^{-1}$  du réactif R-Cl à l'instant  $n$  en minutes.

L'exploitation à l'aide d'un tableau des mesures obtenues expérimentalement nous conduit à observer que la différence  $C_{n+1} - C_n$  semble proportionnelle à  $C_n^2$ . La constante de proportionnalité étant sensiblement voisine de  $-0,08$ , on peut admettre que :

$C_{n+1} - C_n = -0,08 C_n^2$ , ce qui donne  $C_{n+1} = C_n(1 - 0,08C_n)$ . On peut alors représenter graphiquement la suite  $C_n$  à l'aide de la relation de récurrence  $C_{n+1} = f(C_n)$  où  $f$  est la fonction polynôme du second degré  $x \rightarrow x - 0,08x^2$ . À cette occasion, on pourra approcher, de manière expérimentale, la notion de limite de suite.

<sup>2</sup>La première égalité n'a de sens que pour les réactifs.

<sup>3</sup>Un tableau donnant les mesures de la concentration du réactif toutes les minutes est disponible dans le fichier Cinétique et suite.xls (Annexes.zip)



Cette première approche peut également être l'occasion d'engager un travail algorithmique (scripts en Python version 3).

### 1. Calcul des 100 premiers termes de la concentration $C_n$ :

```
d=0.5
print (" quelques termes concentrations [R-Cl] en mol.L-1")
for i in range(100):
    d=d*(1-0.08*d)
    print (i+1,d)
```

### 2. Calcul du terme de rang $n$ de la concentration

```
#
C=float(input('entrer la concentration initiale : '))
k=float(input('entrer la valeur de la constante de réaction k: '))
n=int(input('entrer le rang année choisie: '))
for i in range (1 , n+1):
    C=C*(1-k*C)
print('concentration finale au rang n: ',C)
```

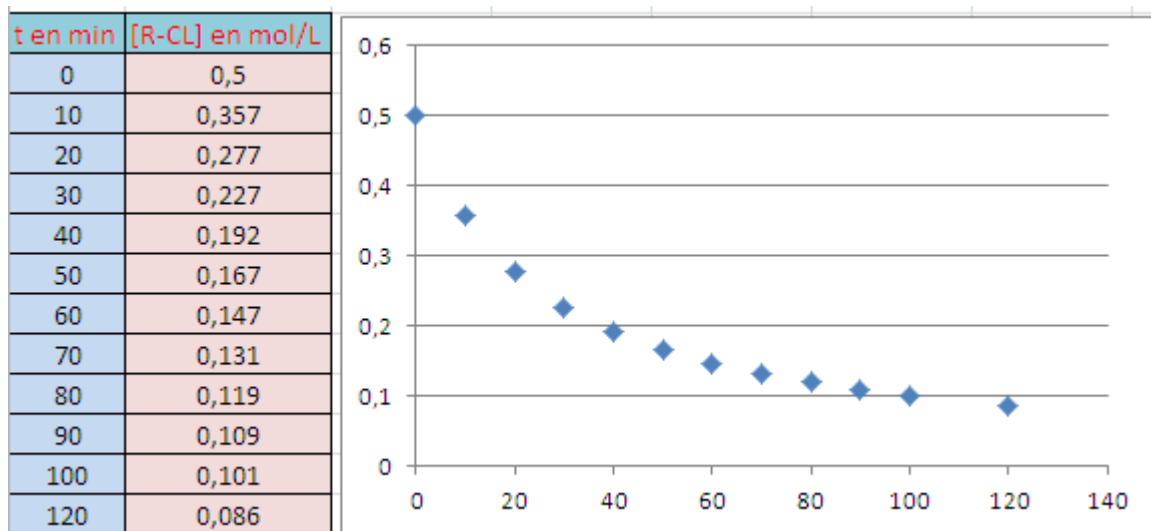
### 3. Recherche du seuil à partir duquel les concentrations sont en dessous de $p$

```
#
C=float(input('entrer la concentration initiale [R-Cl] en Mol/L: '))
k=float(input('entrer la constante de réaction k: '))
p=input('entrer le seuil de concentration choisi: ')
n=0
while (C>p):
    C=C*(1-k*C)
    n=n+1
print('concentration inférieure à la précision souhaitée pour n: ',n)
```

#### D. Seconde approche : modélisation continue et dérivation

On note  $C(t)$  la concentration en mol.L<sup>-1</sup> du réactif R-Cl à l'instant  $t$  avec  $C(0) = 0,5$ .

Les valeurs expérimentales exploitées dans le paragraphe 3 nous permettent de construire un premier nuage de points  $(t_i, C(t_i))$ .

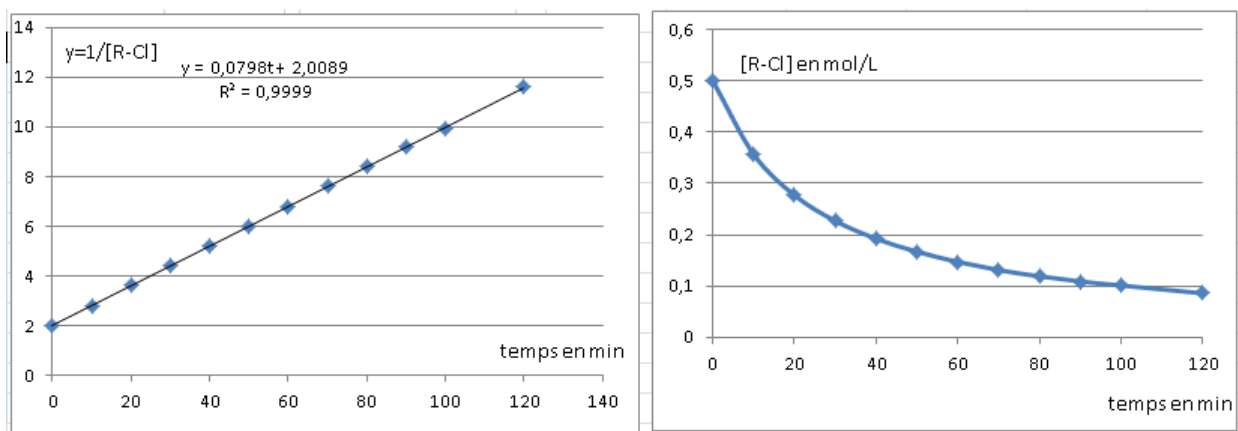


En posant  $(t) = \frac{1}{C(t)}$ , on construit un second nuage de points  $(t_i, \frac{1}{C(t_i)})$ .

On peut alors conjecturer que les points de ce nuage sont alignés et déterminer graphiquement une équation de droite ajustant ce nuage.

L'utilisation d'un tableur nous permet d'obtenir une courbe de tendance linéaire dont l'équation est :  $y = 0,08t + 2$ , coefficients arrondis à 0,01 près.

La courbe de la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(t) = \frac{1}{0,08t + 2}$  semble ajuster convenablement le nuage de points initial.



La vitesse de réaction vérifie l'égalité  $v = -0,08 C^2(t) = -\frac{dC(t)}{dt}$ .

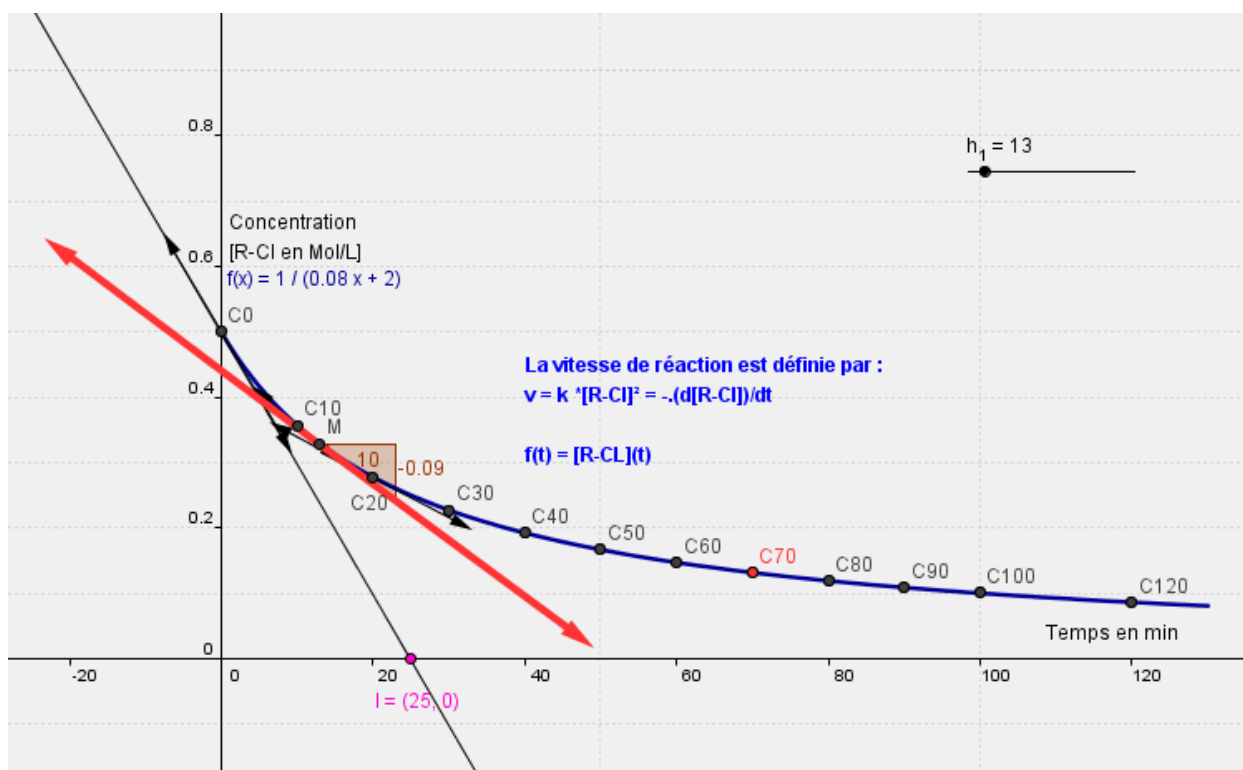


Figure réalisée avec le logiciel Géogébra

La vitesse de réaction à un instant  $t$  peut être déterminée par lecture graphique<sup>4</sup> (pente de la tangente à la courbe à l'instant  $t$  considéré). Ce type de démarche est fréquemment mis en œuvre dans le cadre de l'enseignement de physique-chimie.

La vitesse de réaction peut être également évaluée à l'aide d'un logiciel de calcul formel en dérivant la fonction  $C$  ou bien en utilisant l'égalité  $v = -0,08 C^2(t)$  avec  $C(t) = \frac{1}{0,08t + 2}$ .

<sup>4</sup> L'unité de la vitesse dépend de l'unité de concentration et de l'unité de temps. Dans le contexte du graphique, la vitesse est exprimée en  $\text{mol L}^{-1}\text{min}^{-1}$ .



## 2. Dosage pH-métrique

Mathématiques		Physique Chimie	
Contenus	Capacités attendues	Notions et contenus	Capacités
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Second degré Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme. Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calculer la dérivée de fonctions</li> <li>- Mobiliser les résultats sur le second degré dans le cadre de la résolution d'un problème</li> <li>- Exploiter le tableau de variation d'une fonction <math>f</math> pour obtenir :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- un éventuel extremum de <math>f</math> ;</li> <li>- le signe de <math>f</math> ;</li> <li>- le nombre de solutions d'une équation du type <math>f(x) = k</math></li> </ul> </li> </ul>	Dosages par titrage Réactions support de titrage : - acide-base (suivis conductimétrique et pH-métrique).	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Déterminer la concentration d'une solution inconnue à partir des conditions expérimentales d'un titrage.</li> </ul>

### A. Le principe

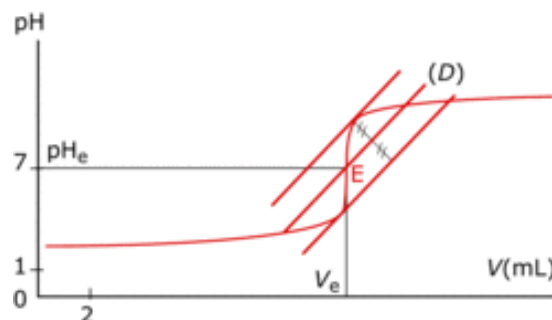
Un dosage pH-métrique est mis en œuvre lorsque l'on veut déterminer la concentration d'une espèce en la faisant réagir avec une autre (les deux espèces doivent avoir des propriétés acido-basiques). Pour cela on ajoute progressivement avec une burette des volumes précis, ( $V_b$ ) d'une solution de concentration connue (réactif titrant) et l'on suit l'évolution du pH du mélange. À l'équivalence d'un dosage on a versé une quantité de **réactif titrant** juste suffisante pour faire réagir la totalité du **réactif titré**. Le volume équivalent est le volume de solution titrante versée à l'équivalence.

Une première méthode de détermination des coordonnées du **point d'équivalence** E d'un dosage pH-métrique utilise la courbe  $\text{pH} = f(V_b)$ , qui présente une brusque variation du pH autour du point d'équivalence (on parle de saut de pH). Le point d'équivalence est le point de la courbe représentative de  $f$  où la dérivée passe par un maximum en valeur absolue.

Cette technique, nommée « **méthode des tangentes parallèles** », consiste à tracer deux tangentes parallèles de part et d'autre du saut de pH, puis de tracer une troisième droite équidistante et parallèle aux deux premières :

Ci-contre, un exemple de courbe obtenue dans le cas du dosage d'une solution d'acide chlorhydrique par une solution de soude.

Cette méthode n'est envisageable que si la courbe est symétrique par rapport au point d'équivalence. On admet que c'est le cas pour les dosages acido-basiques.



### Le point mathématique sur cette méthode :

Considérons une fonction  $f$  (dérivable) définie sur un intervalle  $I$  centré en  $x_0$  et dérivable sur  $I \setminus \{x_0\}$ . Supposons également que la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  possède un point d'inflexion en  $x_0$  qui soit également son centre de symétrie.

La courbe représentative de la fonction dérivée  $f'$  possède alors un axe de symétrie. En effet, en posant  $y_0 = f(x_0)$  on a pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) + f(2x_0 - x) = 2y_0 \text{ implique } f'(2x_0 - x) = f'(x).$$

Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on peut supposer de plus que la fonction  $f'$  est strictement croissante avant  $x_0$  et strictement décroissante après  $x_0$ . Alors, pour tout réel  $a$  appartenant à l'intervalle  $I$ , distinct de  $x_0$ , il existe un unique réel  $a'$  appartenant à  $I$  tel que  $f'(a) = f'(a')$  :  $a' = 2x_0 - a$ . On en déduit que si  $d$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ , il existe une unique tangente  $d'$  distincte de  $d$  et parallèle à  $d$ . Ces tangentes sont symétriques par rapport au point d'inflexion, par construction. La droite  $\Delta$ , équidistante de ces deux tangentes, passe par le centre de symétrie, donc par le point d'inflexion.

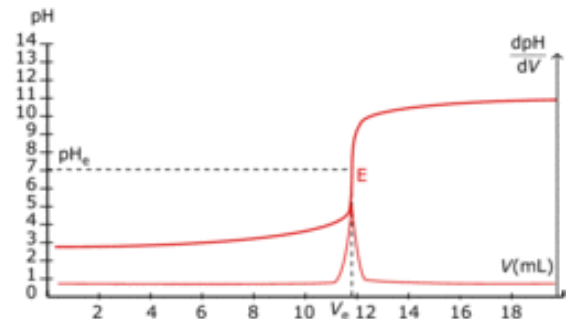
On peut vérifier qu'il n'y a que deux cas possibles :  $\Delta$  coupe  $\mathcal{C}$  en un point ou en trois points et dans ce dernier cas, le point d'inflexion est le point du milieu.

Une seconde méthode de détermination des coordonnées du point d'équivalence d'un dosage pH-métrique à partir de la courbe  $\text{pH} = f(V_b)$  consiste à tracer, à l'aide d'un logiciel, la **courbe « dérivée » de la courbe de titrage** :

Ci-contre, un exemple de courbe obtenue dans le cas du dosage d'une solution d'acide chlorhydrique par une solution de soude.

Le volume équivalent  $V_E$  est le volume pour lequel la dérivée est maximale, repérable par un pic sur la courbe de la fonction dérivée.

Ces deux méthodes sont applicables à toutes les courbes qui présentent un saut (saut de potentiel par exemple).



### B. Exploitation mathématique

La détermination du point d'équivalence par l'obtention de la courbe de la fonction dérivée de la fonction de titrage est particulièrement intéressante à exploiter. Il est possible, dans un premier temps, de rester sur l'interprétation graphique du point d'inflexion reposant sur une acquisition par ordinateur.

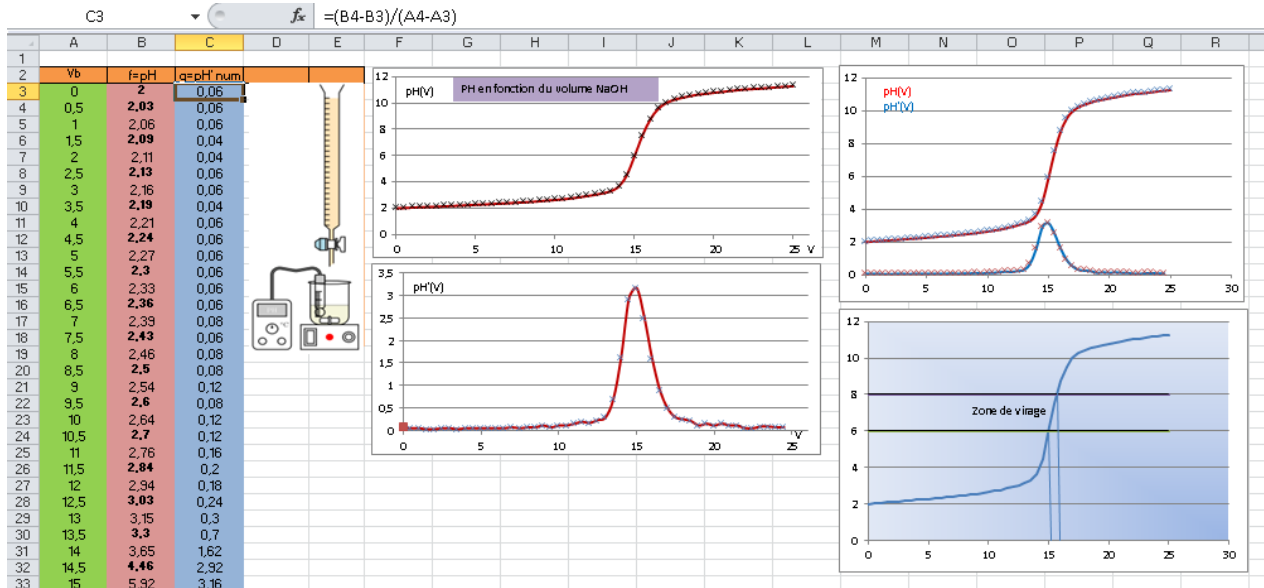
L'expression de la fonction donnant le pH de la solution en fonction du volume de réactif titrant n'est pas connue. On utilise l'approximation suivante :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} . \text{ Dans l'exemple ci-dessus, le pas } h \text{ choisi est de } 0,5 \text{ ml.}$$

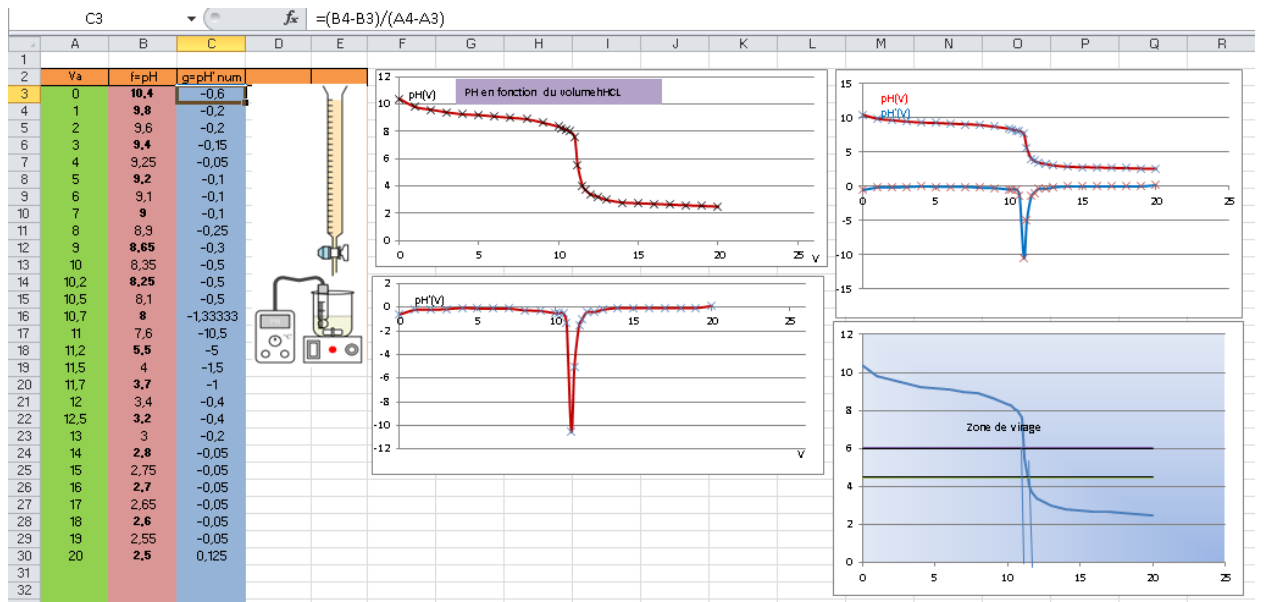
On peut exploiter, dans un second temps, les quelques points situés autour du point d'équivalence et un ajustement par une fonction polynôme du second degré (courbe de tendance polynomiale du second degré obtenue à l'aide d'un logiciel) afin de déterminer une valeur approchée du volume équivalent, abscisse du maximum dans notre situation.

Il sera important de travailler sur des fonctions de titrage croissantes et aussi sur des fonctions de titrages décroissantes.

### Exemple de fonction de titrage croissante



### Exemple de fonction de titrage décroissante



Ce type d'activité peut déboucher sur des exercices où l'on retrouve des situations analogues pour lesquelles on pourra observer le changement de concavité de la courbe représentative d'une fonction  $f$  à partir de la courbe de la fonction dérivée de cette fonction. L'étude de certaines fonctions polynômes de degré 3 permettra de travailler conjointement sur des lectures graphiques et sur les polynômes du second degré.

### 3. Lentilles minces

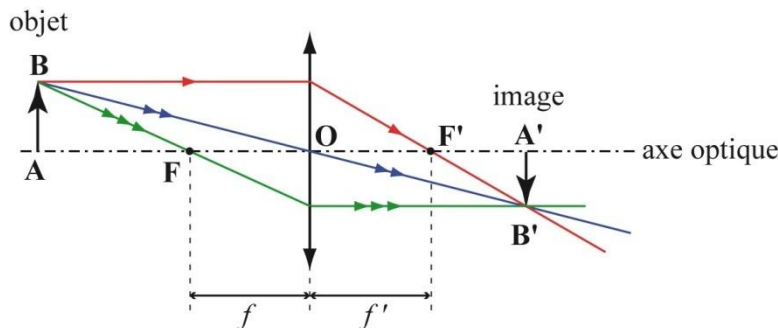
Mathématiques		Physique Chimie	
Contenus	Capacités attendues	Notions et contenus	Capacités
Second degré Équation du second degré, discriminant.	-Mobiliser les résultats sur le second degré dans le cadre d'une résolution de problème.	Lentilles minces convergentes.	- Exploiter les notions de foyers, distance focale pour caractériser un système optique. - Utiliser les relations de conjugaison pour prévoir la position de la taille d'une image obtenue à travers une lentille mince convergente. Réaliser une simulation numérique.

#### A. Le principe

En optique, l'utilisation des lentilles est courante (modélisation de l'œil par exemple). Une lentille convergente est caractérisée par son foyer image et son foyer objet ainsi que son centre optique.

Les élèves doivent pouvoir prévoir géométriquement (par le dessin) la position et la taille de l'image obtenue à travers une lentille convergente en s'appuyant sur les trois principes suivants :

- Tout rayon parallèle à l'axe optique ressort de la lentille en passant par le foyer image  $F'$ .
- Tout rayon passant par le centre optique  $O$  n'est pas dévié.
- Tout rayon passant par le foyer objet  $F$  ressort de la lentille parallèlement à l'axe optique.



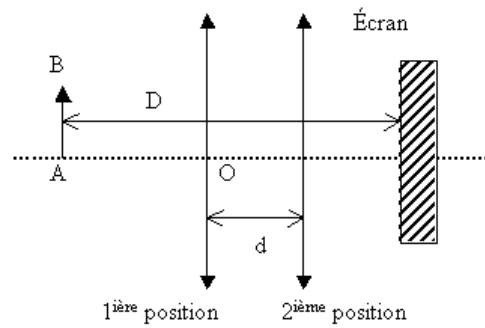
La relation de conjugaison de Descartes donne une relation entre les positions sur l'axe optique d'un objet et de son image par rapport au centre optique et la distance focale  $f' = \overline{OF'}$ . Elle est exprimée avec des valeurs algébriques.

Soit  $A$  un point de l'axe optique et  $A'$  son image par la lentille :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$ .

## B. Détermination de la distance focale image $f'$ d'une lentille mince par la méthode de Bessel



Wilhelm Bessel (1784-1846)



Soit  $D$  la distance entre un objet  $AB$  et un écran sur lequel l'image de l'objet se projette au travers d'une lentille. On peut démontrer que si  $D > 4f'$  alors il existe deux positions de la lentille distantes de  $d$  pour lesquelles on obtient une image **nette de l'objet** sur l'écran. De plus :

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D} .$$

Justification de ce résultat :

$D = \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'}$ . En utilisant la formule de conjugaison,  $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$  on obtient

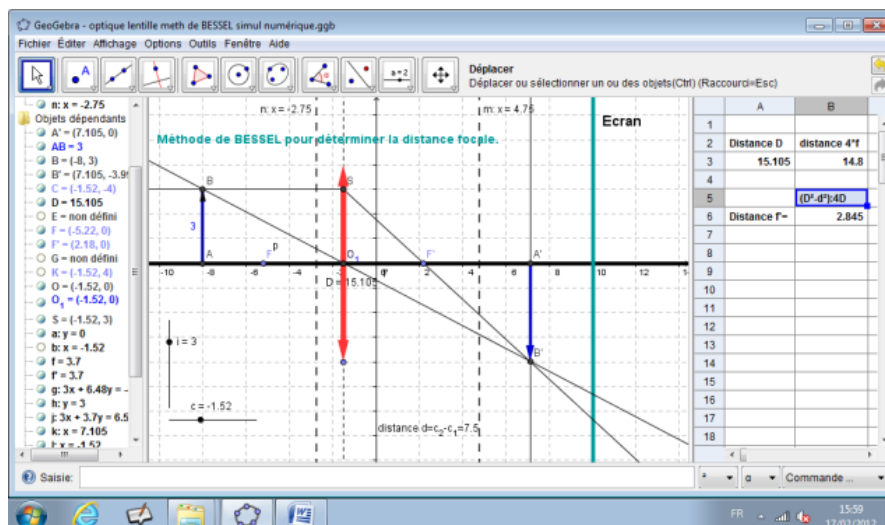
$$\frac{1}{D + \overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \text{ puis } (D + \overline{OA})\overline{OA} = -f'(D + \overline{OA}) + f'\overline{OA}.$$

En posant  $\overline{OA} = x$  on est conduit à résoudre l'équation du second degré  $x^2 + Dx + f'D = 0$  (1) de discriminant  $\Delta = D^2 - 4f'D = D(D - 4f')$ .

Ainsi,  $D$  étant une grandeur strictement positive, l'équation (1) a deux solutions distinctes lorsque

$$D > 4f'. \text{ Ces solutions sont : } x_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4f'D}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4f'D}}{2}.$$

$$\text{Or } d = |x_1 - x_2|. \text{ D'où } d^2 = D^2 - 4f'D \text{ ce qui donne } f' = \frac{D^2 - d^2}{4D} .$$



### C. Une situation mettant en œuvre la loi binomiale et la notion d'intervalle de fluctuation

On dispose de lots de 90 lentilles prélevés d'un stock issu d'une entreprise de fabrication. Ce stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de lots de 90 lentilles, à un tirage avec remise.

Une lentille est considérée comme étant conforme au cahier des charges de fabrication si sa vergence est comprise entre  $5,3 \delta$  et  $5,6 \delta$ .

Le service de contrôle de qualité de l'entreprise estime que 80% des lentilles fabriquées sont conformes.

Chacun des lots de 90 lentilles ayant été prélevé de manière indépendante, la variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de lentilles conformes dans un lot de 90 suit la loi binomiale  $B(90;0,8)$ .

On peut s'intéresser dans un premier temps au calcul et à l'interprétation de l'espérance et de l'écart-type de cette variable aléatoire.

Enfin, on peut demander de déterminer, à l'aide d'un algorithme, les entiers  $a$  et  $b$  tels que :

- $a$  est le plus petit entier tel que  $P(X \leq a) > 0,025$
- $b$  est le plus petit entier tel que  $P(X \leq b) \geq 0,975$

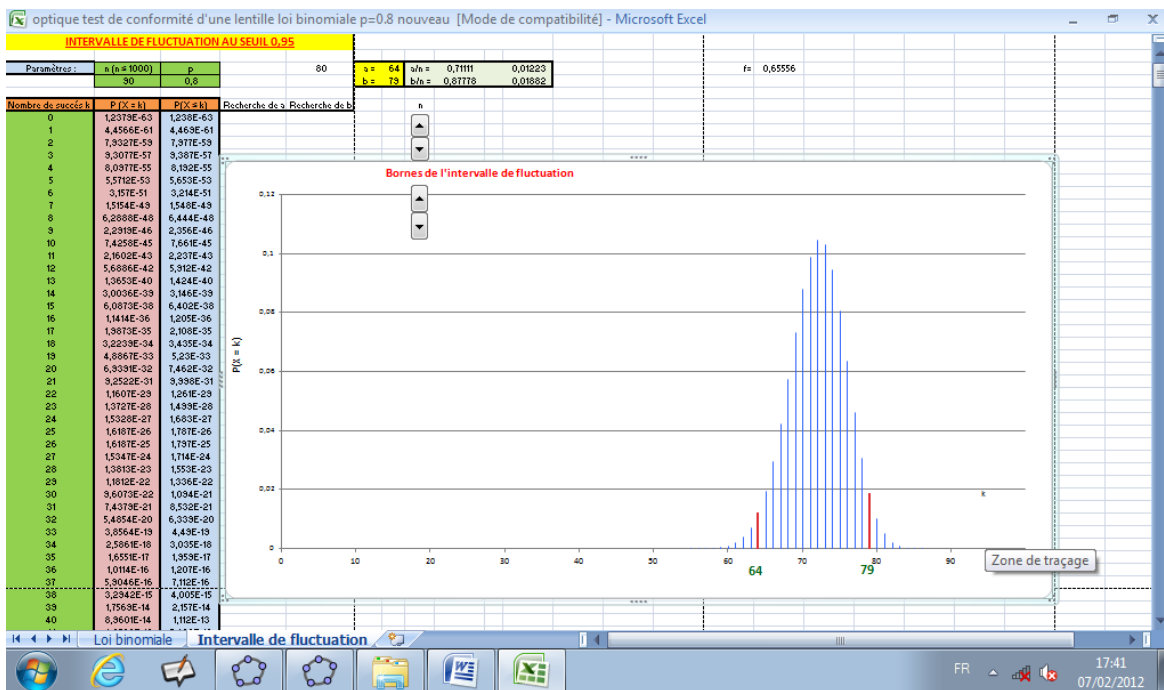
On obtient ainsi, pour intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 95%, l'intervalle  $\left[ \frac{64}{90} ; \frac{79}{90} \right]$ .

#### Exemple de prise de décision :

Si un lot de 90 lentilles ne comporte que 66 lentilles conformes au cahier des charges, on peut conclure que ce nombre provient de la fluctuation d'échantillonnage au seuil de confiance de 95%. Il n'y a pas de mesure spéciale à prendre.

Par contre, si un lot de lentilles ne comporte que 62 lentilles conformes au cahier des charges alors on peut conclure, au seuil de confiance de 95%, que la production n'est plus conforme aux attentes. Il faut revoir la chaîne de fabrication.

Avec le logiciel Géogebra :



Algorithme permettant de déterminer l'intervalle de fluctuation avec le logiciel XCAS

1	Prog Edit Ajouter	12	nxt
<pre>saisir(n); saisir(p); k:=0; tantque binomial_cdf(n,p,k)&lt;=0.025 faire   k:=k+1 ftantque; a:=k; tantque binomial_cdf(n,p,k)&lt;0.975 faire   k:=k+1 ftantque; b:=k; afficher("avec n= "+n+" et p= "+p+", a= "+a+" et b= "+b); afficher("Intervalle de fluctuation au seuil 95% : ["+a/n+" ; "+b/n+"]"); afficher("soit environ ["+approx(a/n,3)+" ; "+approx(b/n,3)+"]"); afficher("");</pre>			
avec n= 115 et p= 0.38, a= 34 et b= 54 Intervalle de fluctuation au seuil 95% : [34/115 ; 54/115] soit environ [0.296 ; 0.47]			

Remarque : On a  $p = 0,8$  (condition limite) et  $n > 25$ . D'après le cours de seconde, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est :

$\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,8 - \frac{1}{\sqrt{90}} ; 0,8 + \frac{1}{\sqrt{90}} \right]$  contient également la proportion 0,73 (égale à 66/90) et on aboutit à la même conclusion.



## 4. Nombre d'ouverture d'un objectif photographique

Mathématiques		Physique Chimie	
Contenus	Capacités attendues	Notions et contenus	Capacités
Suites géométriques	Écrire le terme général d'une suite définie par son premier terme et sa raison	Appareil photographique numérique : mise au point, ouverture, temps de pose. Angle de champ. Grandissement. Profondeur de champ. Grossissement. Illustrer	Illustrer expérimentalement le principe de mise au point automatique. Associer l'éclairement et l'énergie reçus au nombre d'ouverture et au temps de pose.

### A. Le principe

Le nombre d'ouverture  $N$  d'un objectif photographique désigne le rapport entre la distance focale  $f$  de l'objectif et le diamètre  $D$  de la pupille d'entrée de celui-ci (ces deux distances doivent être exprimées avec la même unité) :

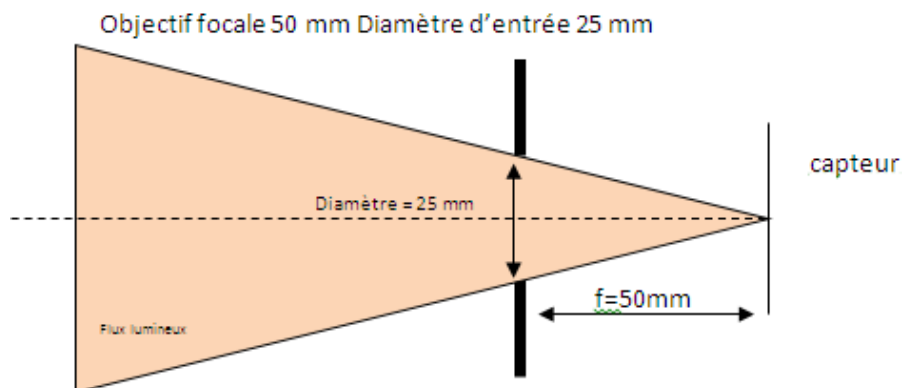
$$N = \frac{f}{D}$$

Ce paramètre permet :

- le réglage de la quantité de lumière arrivant sur le capteur de l'appareil photo ;
- la variation de la profondeur de champ (zone de netteté de part et d'autre du réglage moyen) ;
- la limitation des aberrations optiques.

Pour un objectif de focale donnée, le nombre d'ouverture est réglé par le diaphragme qui limite le diamètre d'entrée.

Pour deux objectifs de focales différentes et de diamètres d'entrée différents, le nombre d'ouverture permet de comparer le flux lumineux reçu par le capteur.



Dans le cas ci-dessus, l'ouverture vaut  $N = 2$



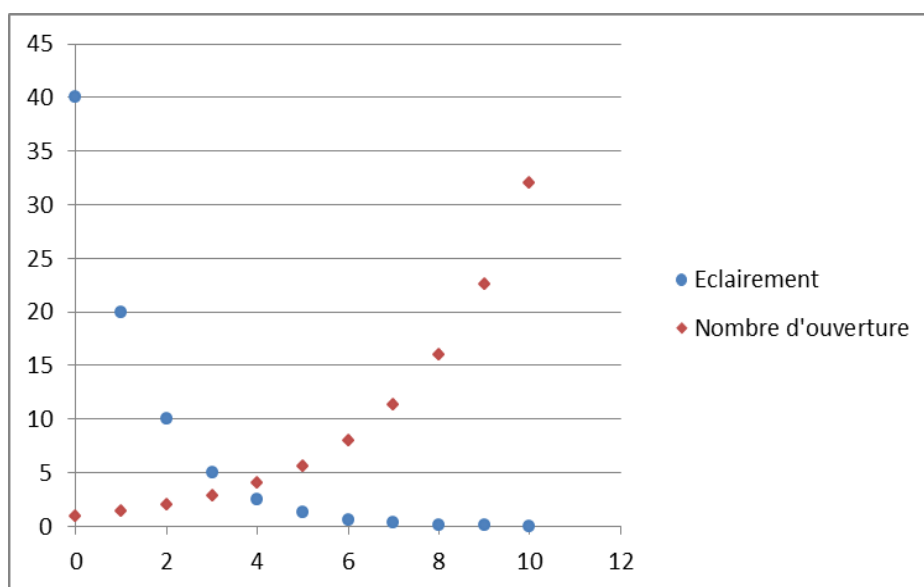
Un objectif de focale 100 mm et de diamètre d'entrée 50 mm a la même ouverture que l'objectif schématisé ci-dessus (de diamètre d'entrée 25 mm et de focale 50 mm).

On montre expérimentalement que l'éclairement  $E$  du capteur est inversement proportionnel au carré de l'ouverture  $N$  :

$$E = K \times \frac{1}{N^2}$$

### B. Le travail mathématique : modélisation par une suite géométrique

Cette situation permet de travailler sur la notion de suite géométrique. On considère par exemple une suite d'éclairements  $E_i$  tels que  $E_{i+1} = \frac{1}{2}E_i$ . On montre que la suite  $N_i$  des ouvertures associées est également une suite géométrique, de raison  $\sqrt{2}$ . Un travail algorithmique peut être engagé pour déterminer le terme de rang  $k$  de ces suites.



## 5. Évaluation de l'exposition d'une photo numérique

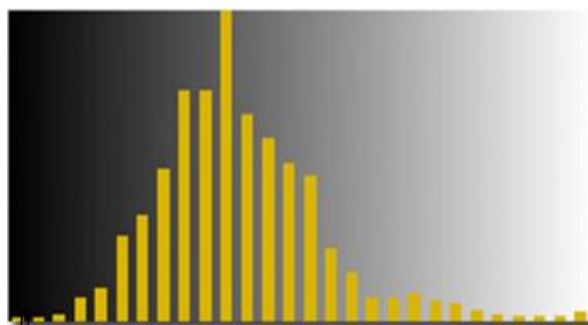
Mathématiques		Physique Chimie	
Contenus	Capacités attendues	Notions et contenus	Capacités
Statistique descriptive, analyse de données	Utiliser de façon appropriée les deux couples usuels qui permettent de résumer une série statistique : (moyenne, écart type) et (médiane, écart interquartile).	Image numérique. Traitement d'image.	Définir le pixel et estimer ses dimensions dans le cas de l'appareil photo numérique, d'un écran vidéo. Expliquer le principe du codage en niveaux de gris et en couleurs RVB. Enoncer qu'une image numérique est associée à un tableau de nombres.

### A. Le principe

Chacun des pixels d'une image numérique est associé à un nombre entier compris entre 0 et 255. Ce nombre correspond à l'intensité lumineuse reçue par le capteur de l'appareil lors de la prise de la photographie. Une image numérique est ainsi constituée d'un tableau de nombres.

L'histogramme d'une image est un diagramme représentant la distribution des intensités des pixels dans une image. La luminosité des pixels (sur une échelle allant de 0 à 255) est placée en abscisse sur l'axe horizontal. L'axe vertical représente le nombre de pixels correspondant à une luminosité particulière. Cet outil est très utile pour juger l'exposition d'une photo.

En physique-chimie, un capteur est couplé à un logiciel qui numérise les données associées à la photo (et notamment la mesure de l'intensité lumineuse).



L'activité consiste à établir l'histogramme associé à l'image étudiée, de façon à faire prendre conscience à l'élève qu'une image numérique est en fait un tableau de nombres.

La répartition des intensités des pixels détermine les niveaux de gris de l'image.

Il s'agit donc d'observer la répartition des intensités des pixels sur l'histogramme de façon à définir si une photo est bien exposée ou pas.

## B. Travail statistique

On propose trois tableaux de données, correspondant à trois photos différentes du même objet (extrait ci-dessous, **document 2**). Les images contiennent 137 760 pixels.



Cliché n° 1



Cliché n° 2



Cliché n° 3

Luminosité	nb pixel
0,00E+00	3
1	4
2	7
3	6
4	10
5	13
6	17
7	17
8	23
9	25
10	35
11	45
12	63
13	80
14	98
15	106
16	130
17	138
18	156
19	225
20	277
21	331
22	414
23	435
24	484
25	569
26	578
27	601
28	655
29	792

Luminosité	nb pixel
0,00E+00	12
1	27
2	34
3	33
4	49
5	97
6	110
7	163
8	237
9	345
10	431
11	590
12	735
13	894
14	926
15	1130
16	1252
17	1160
18	1118
19	1082
20	1001
21	970
22	936
23	879
24	817
25	767
26	810
27	775
28	803
29	911

Luminosité	nb pixel
0,00E+00	0,00E+00
1	0,00E+00
2	0,00E+00
3	0,00E+00
4	0,00E+00
5	0,00E+00
6	0,00E+00
7	0,00E+00
8	0,00E+00
9	2
10	2
11	0,00E+00
12	5
13	4
14	4
15	1
16	7
17	4
18	5
19	11
20	12
21	13
22	17
23	28
24	52
25	33
26	56
27	53
28	46
29	59

Document 2

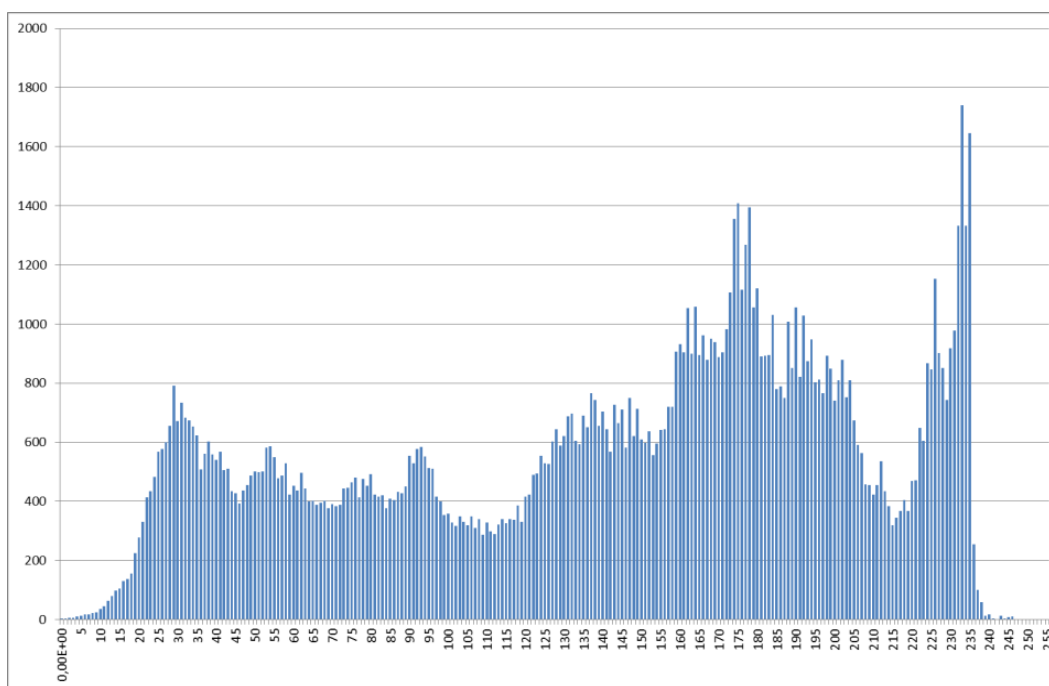
À l'aide des listes du tableur ou de la calculatrice, on calcule la moyenne et l'écart-type de chacune de ces séries, puis la médiane et les quartiles dans chacun des cas.

Moyenne C1	Moyenne C2	Moyenne C3
140,86	101,25	175,41

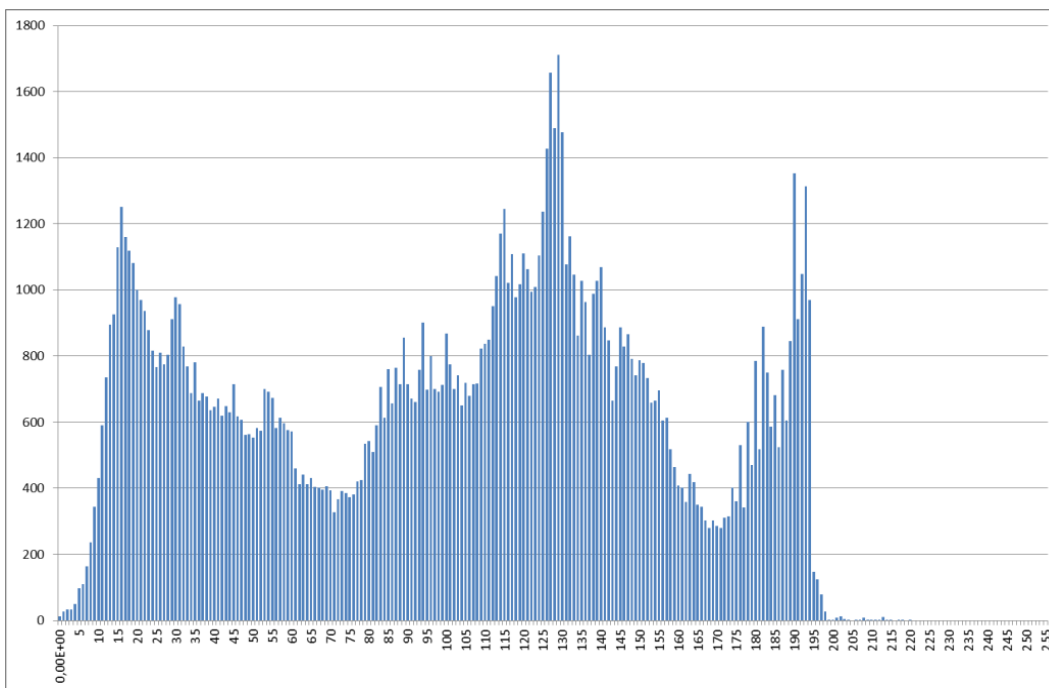
Écart-type C1	Écart-type C2	Écart-type C3
63,48138961	53,77784556	64,55206884

	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile
Cliché 1	Q1 = 25	M = 155	Q3 = 191
Cliché 2	Q1 = 13	M = 109	Q3 = 140
Cliché 3	Q1 = 44	M = 197	Q3 = 226

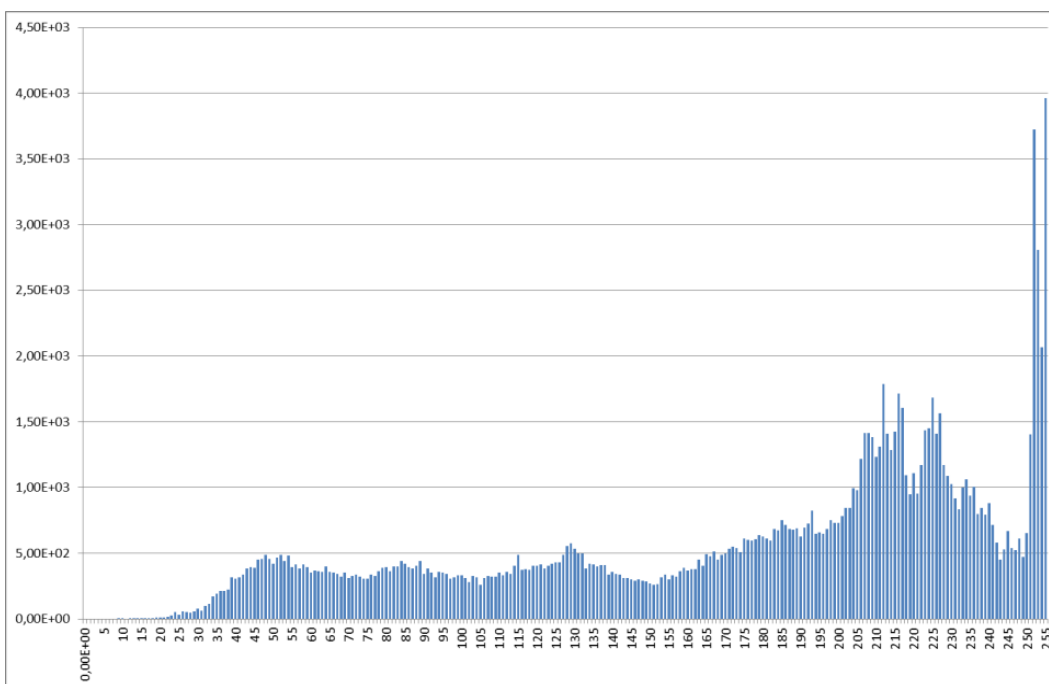
On fournit ou on fait établir maintenant à l'élève les histogrammes associés aux trois photos, ainsi que les clichés correspondants (**documents 3, 4 et 5**).



**Document 3**



**Document 4**

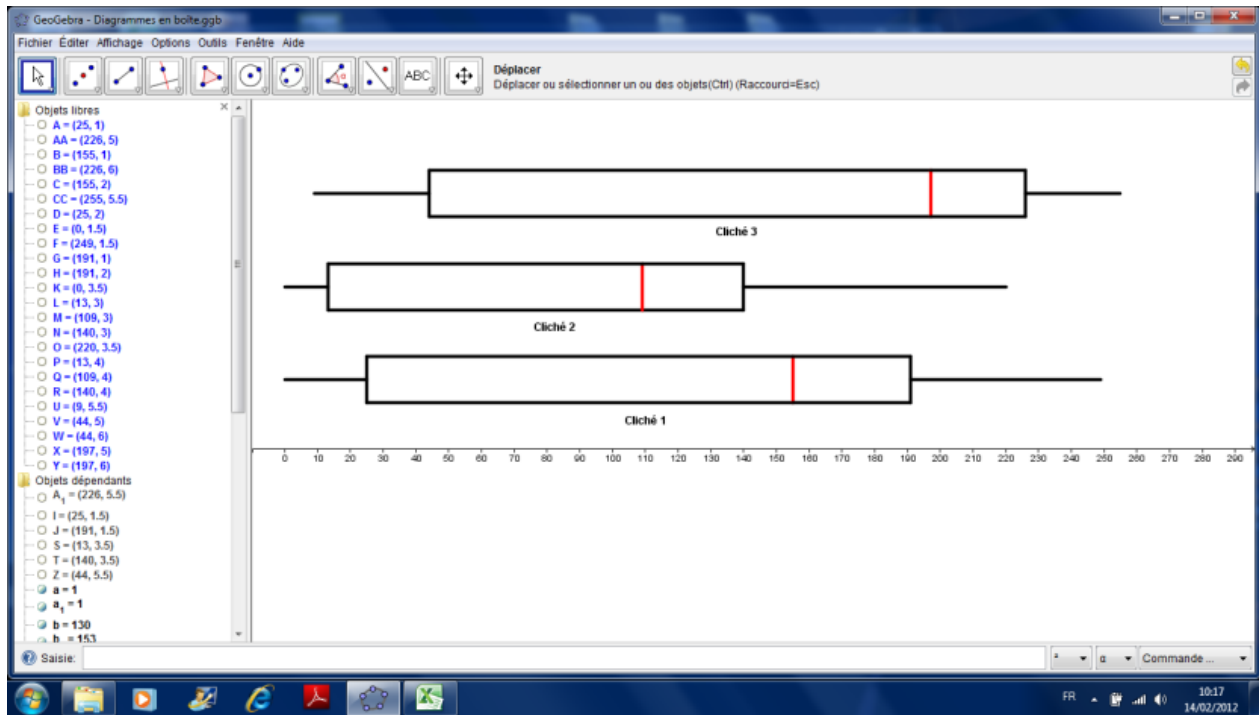


**Document 5**

Le cliché correctement exposé correspond à celui dont la distribution des intensités est la plus homogène. C'est le cliché 1, associé à l'histogramme du document 3.

Après discussion avec les élèves sur la pertinence du couple moyenne/écart-type, on fait alors le choix du couple médiane/interquartile pour décrire mathématiquement la répartition des pixels. En effet, la moyenne ne donne aucune indication de la répartition régulière des pixels dans tous les niveaux de gris.

On peut faire représenter les trois séries à l'aide de diagrammes en boîte (**document 6**).



**Document 6**

La comparaison des diagrammes fait apparaître des « boîtes » plus ou moins décalées vers la gauche ou vers la droite : la plus centrée correspond au cliché le mieux exposé. Les diagrammes des clichés 2 et 3 sont à rejeter en raison d'un premier quartile faible pour le cliché 2 (au moins 25% des pixels sont associés à une luminosité peu élevée) et d'un troisième quartile élevé pour le cliché 3 (intensités lumineuses élevées surreprésentées par rapport aux deux autres clichés).

Le diagramme le plus cohérent (intensités lumineuses bien réparties sur les pixels) est donc celui du cliché 1, choisi comme le cliché le mieux exposé.

### **Remarque**

Cette activité n'a de sens que pour la comparaison de plusieurs clichés d'un même sujet. En effet, la répartition des niveaux de gris sur une image numérique varie de façon significative en fonction de l'objet photographié et des effets souhaités sur l'image (contraste, arrière-plan...).

Il est donc impossible de définir mathématiquement un critère universel de qualité d'exposition d'une image numérique.

## 6. Codage binaire d'une transmission ADSL

Mathématiques		Physique Chimie	
Contenus	Capacités attendues	Notions et contenus	Capacités
Loi binomiale.  Échantillonnage Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence observée d'un échantillon.	Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale.  Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation, à environ 95%, d'une fréquence.  Exploiter un intervalle pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.	Information : Sources d'information, signaux, débit. Chaîne de transmission d'informations.	Identifier les éléments d'une chaîne de transmission d'informations.  Caractériser une transmission numérique par son débit binaire.

### A. Le principe

La technique « ADSL » (Asymmetric Digital Subscriber Line) permet d'obtenir le haut débit pour les connexions internet, tout en continuant à exploiter les lignes téléphoniques existantes.

Sur la ligne téléphonique classique (paire de cuivre), on utilise la totalité du spectre fréquentiel disponible (voir Figure 1) avec la répartition suivante:

- Le signal analogique du téléphone et service de signalisation [0 ; 25 kHz].
- Les données numériques [25 kHz ; 1,1 Mhz].

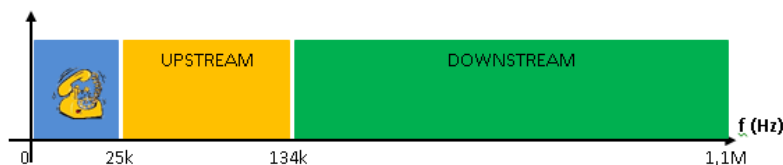


Figure 1

Pour les données numériques, le canal est divisé en deux parties, justifiant ainsi l'appellation « asymétrique » :

- Canal up Stream : réservé aux signaux dans le sens montant c'est-à-dire de l'utilisateur vers le réseau.
- Canal down Stream : réservé aux signaux dans le sens descendant c'est à dire du réseau vers l'utilisateur.

L'intégralité de la bande de fréquence de la ligne téléphonique est découpée en 256 sous-canaux de 4,3 kHz. Les sous-canaux 1 à 6 sont utilisés pour la téléphonie analogique (0 à 25 kHz). Les sous-canaux 7 à 31 sont réservés pour le canal montant (25 kHz à 134 kHz) et enfin les 225 derniers sous-canaux sont utilisés pour le canal descendant avec un débit maximal théorique de 64 Kbits/s pour chaque sous-canal.

Les données binaires (0 ou 1) sont transformées en un signal électrique pour pouvoir être transportées à travers la ligne de cuivre. Par souci de simplification nous utiliserons un codage NRZ (non return to zero) bipolaire :

$$\begin{cases} 0 \rightarrow -5V \\ 1 \rightarrow +5V \end{cases}$$

On obtient donc la représentation suivante (Figure 2) pour une suite binaire de 16 bits.

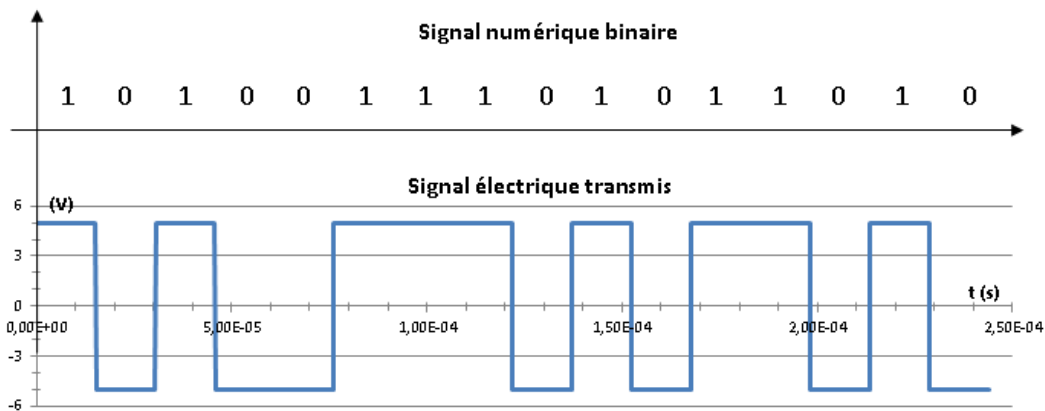


Figure 2

Le bruit (perturbation aléatoire due aux composants électroniques de la chaîne et aux rayonnements électromagnétiques extérieurs à la ligne) est un paramètre influençant la forme du signal.

On considère une ligne idéale avec une bande passante infinie. Le signal reçu sera donc atténué sans influence sur sa forme. La seule perturbation sera due au bruit.

Pour la séquence binaire précédente, on obtient alors, dans le cas d'une ligne fortement bruitée et d'un coefficient d'atténuation de 5, le signal reçu de la Figure 3.

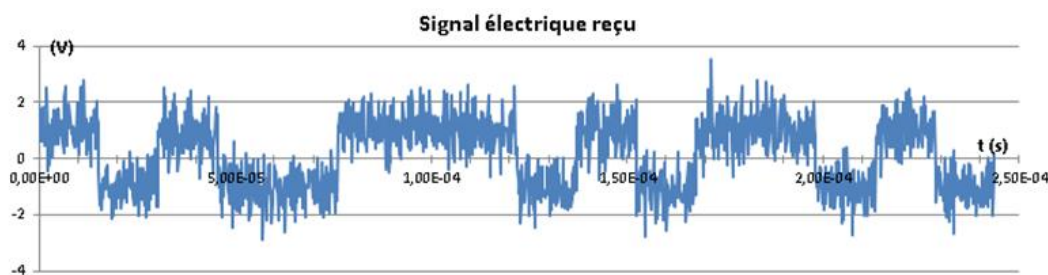


Figure 3

Avec une fréquence d'échantillonnage élevée sur le signal reçu, on peut représenter le graphe représentant le nombre d'échantillons pour les tensions possibles à la réception.

Il apparaît que pour retrouver le code binaire d'origine avec la probabilité d'erreur la plus faible, il faut établir un seuil : 0 V en l'occurrence.

- Si l'échantillon prélevé est supérieur à 0 alors il s'agit du code binaire 1
- Si l'échantillon prélevé est inférieur à 0 alors il s'agit du code binaire 0

Cependant la probabilité qu'un 0 (ou 1) émis soit décodé comme un 1 reçu (respectivement 0) n'est pas nulle. Elle est d'autant plus grande que le bruit est important.

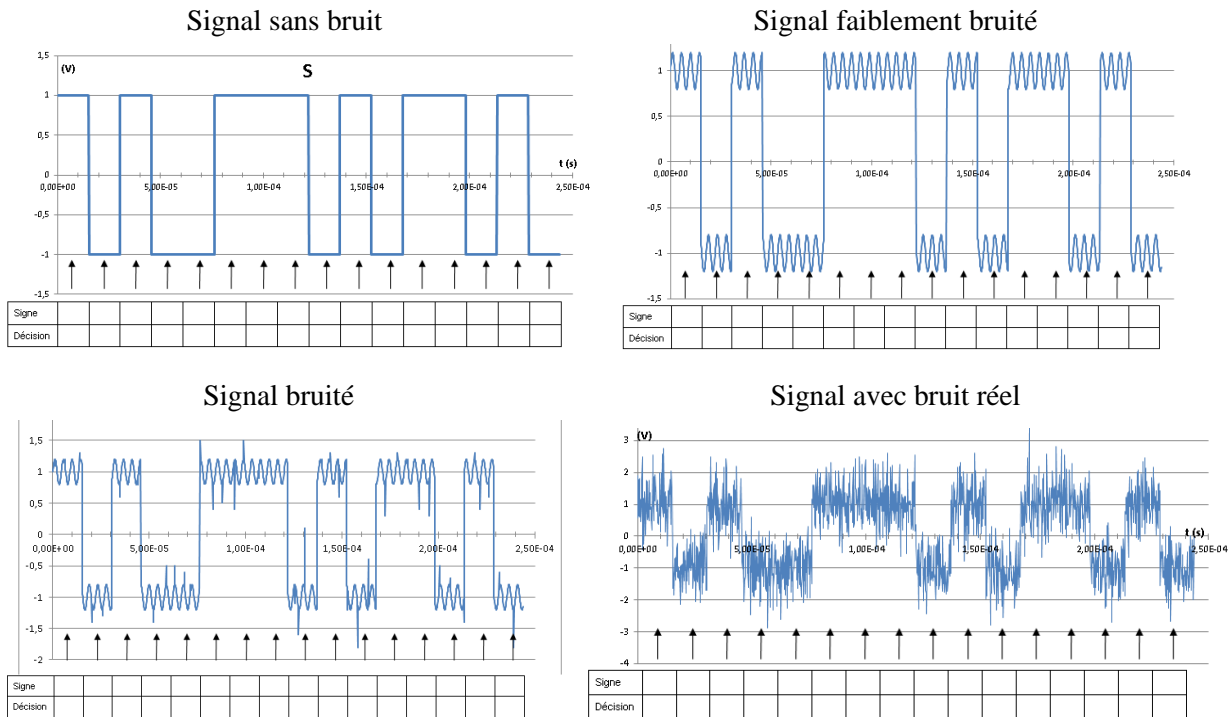
Il a été établi par des tests subjectifs qu'une probabilité d'erreur de  $10^{-5}$  n'affecte pas de manière sensible la qualité d'une transmission téléphonique sous forme numérique.

Dans le cas de transmission de données par ADSL, il faut un taux bien plus faible ( $10^{-7}$ ) que l'on obtient en rajoutant des informations binaires au message d'origine. Ces informations supplémentaires permettent de détecter des erreurs et souvent de les corriger.



## B. Reconnaissance d'une loi binomiale et évaluation des erreurs d'une transmission ADSL

Le signal électrique  $S$  reçu sur la ligne ADSL d'un ordinateur est représenté sur les figures ci-dessous selon le niveau du bruit. Les dates auxquelles ont été prélevés les échantillons sont repérées par les flèches verticales.



On peut, dans un premier temps, pour se familiariser avec le principe exposé, compléter les tableaux ci-dessus en indiquant le signe de l'échantillon et le résultat de la décision concernant le bit décodé.

On considère, pour la suite, des codages de 16 bits du signal avec bruit réel. On note  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre d'erreurs identifiées dans la transmission d'un signal.  $X$  suit une loi binomiale de paramètre 16 et  $p = 10^{-7}$ . On peut ainsi évaluer la probabilité  $P$  que le codage du signal contienne au moins  $k$  erreurs ( $k$  à fixer).

Considérons alors la fréquence  $F_N$  correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de  $N$  séquences de codage de 16 bits, de la variable aléatoire  $X_N$  suivant la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $P$ .

La détermination de l'intervalle de fluctuation, au seuil de 95%, de la fréquence  $F_N$  peut conduire à reconsidérer la qualité de la transmission (ligne peut-être anormalement bruitée) si la fréquence observée sur un échantillon n'appartient pas à cet intervalle.