La notion de vitesse dans les nouveaux programmes de physique-chimie : lien avec les mathématiques.

Les nouveaux programmes de physique-chimie du lycée sont ambitieux : l'activité de modélisation y est centrale. L'un des objectifs est de construire une véritable articulation entre les mathématiques et la physique, afin que les élèves puissent mieux s'emparer des concepts travaillés.

Cet article propose de porter plus particulièrement le regard sur **la notion de vitesse** et sa modélisation par un vecteur dès la seconde, puis sur la construction de **vecteurs variation de vitesse** et accélération, en spécialité de première et terminale.

I - La vitesse dans les programmes

Au collège :
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/2/Cycle_3_programme_consolide_1038202.pdf
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/4/Cycle_4_programme_consolide_1038204.pdf

Au cycle 3 (sciences et technologie)

Connaissances et compétences associées
Décrire un mouvement et identifier les différences entre mouvements circulaire ou rectiligne. - Mouvement d'un objet (trajectoire et vitesse : unités et ordres de grandeur). - Exemples de mouvements simples : rectiligne, circulaire. *Élaborer et mettre en œuvre un protocole pour appréhender la notion de mouvement et de mesure de la valeur de la vitesse d'un objet.* - Mouvements dont la valeur de la vitesse (module) est constante ou variable (accélération, décélération) dans un mouvement rectiligne.

Au cycle 4 :

Connaissances et compétences associées
Caractériser un mouvement. Utiliser la relation liant vitesse, distance et durée dans le cas d'un mouvement uniforme. - Vitesse : direction, sens et valeur. - Mouvements rectilignes et circulaires. Mouvements uniformes et mouvements dont la vitesse varie au cours du temps en direction ou en valeur.

Il est également inscrit dans le BO : **L'éducation physique et sportive** permet de donner un sens concret aux données mathématiques en travaillant sur temps, distance et vitesse.

Au **cycle 3**, l'approche de la notion de vitesse est qualitative. Il s'agit de décrire des mouvements, comparer des ordres de grandeur de vitesses, distinguer des mouvement uniformes et variés. Une première approche de la relation liant vitesse, distance et durée est établie par la mesure.

Au **cycle 4** : La relation de définition de la vitesse (au sens scalaire) est travaillée. En lien avec les mouvements, une approche qualitative de la dimension vectorielle est amorcée avec la direction, le sens et la valeur mais sans aucune formalisation.

En mathématiques, il est précisé que les mathématiques « fournissent en effet des outils de calcul et de représentation et des modèles qui permettent de traiter des situations issues de toutes les autres disciplines enseignées au cycle 4. » et il est par exemple demandé aux élèves d' « utiliser une formule liant deux grandeurs dans une situation de proportionnalité (par exemple la longueur d'un cercle en fonction de son rayon, la loi d'Ohm exprimant la tension en fonction de l'intensité, la distance parcourue en fonction du temps à vitesse constante, etc.) ».

Au lycée : En seconde
https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/98/9/spe634_annexe_1062989.pdf

Notions et contenus	**Capacités exigibles - Activités expérimentales support de la formation**
1. Décrire un mouvement	
Vecteur déplacement d'un point. Vecteur vitesse moyenne d'un point. Vecteur vitesse d'un point. Mouvement rectiligne.	Définir le vecteur vitesse moyenne d'un point. Approcher le vecteur vitesse d'un point à l'aide du vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$, où M et M' sont les positions successives à des instants voisins séparés de Δt ; le représenter. Caractériser un mouvement rectiligne uniforme ou non uniforme. *Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie d'un système en mouvement et représenter des vecteurs vitesse ; décrire la variation du vecteur vitesse.*
3. Principe d'inertie	
Modèle du point matériel. Principe d'inertie. Cas de situations d'immobilité et de mouvements rectilignes uniformes. Cas de la chute libre à une dimension.	Relier la variation entre deux instants voisins du vecteur vitesse d'un système modélisé par un point matériel à l'existence d'actions extérieures modélisées par des forces dont la somme est non nulle, en particulier dans le cas d'un mouvement de chute libre à une dimension (avec ou sans vitesse initiale).

La dimension vectorielle est abordée avec une approche qualitative de la dérivée (non encore étudiée en mathématiques) en passant du vecteur vitesse moyenne au vecteur vitesse d'un point (on ne parle plus de vitesse instantanée). Il s'agit d'un passage qualitatif à la limite **quand Δt tend vers zéro à droite**, en cohérence avec l'approche mathématique à venir. Une description qualitative de la variation du vecteur vitesse est abordée. L'étude quantitative est limitée aux mouvements à une dimension. Le principe d'inertie fait le lien entre la variation du vecteur vitesse et la résultante des forces appliquées à un système ponctuel dans les situations d'immobilité et de mouvements rectilignes.

- bilan de forces nul ↔ variation du vecteur vitesse nulle.
- bilan des forces non nul ↔ variation du vecteur vitesse non nulle.

En spécialité de Première
http://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/43/2/spe635_annexe_1063432.pdf

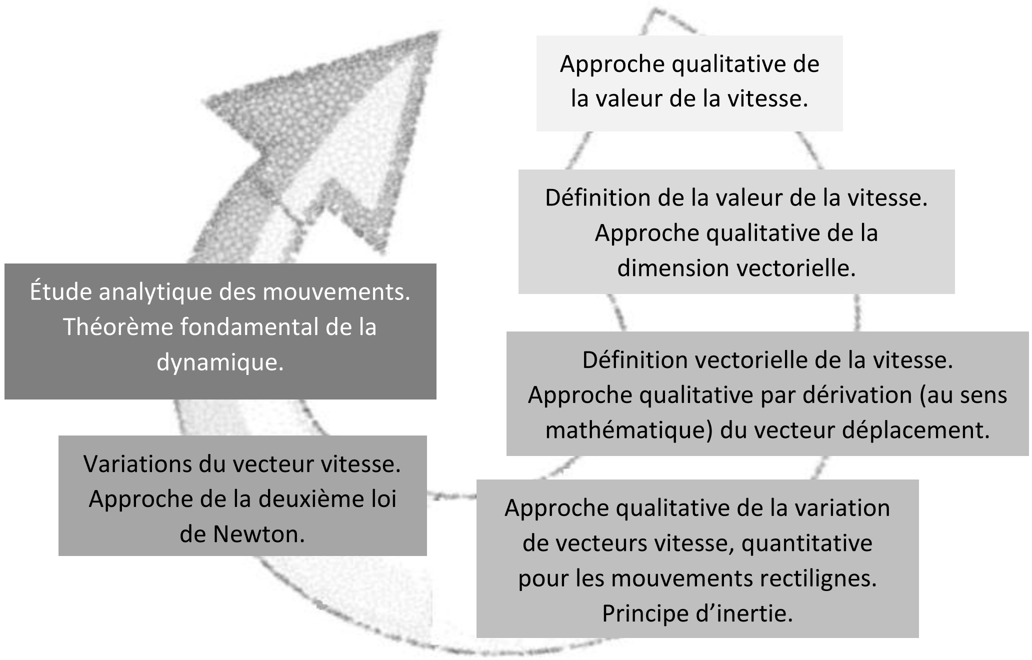
Notions et contenus	**Capacités exigibles - Activités expérimentales support de la formation**
3. Mouvement d'un système	
Vecteur variation de vitesse. Lien entre la variation du vecteur vitesse d'un système modélisé par un point matériel entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées sur celui-ci.	Utiliser la relation approchée entre la variation du vecteur vitesse d'un système modélisé par un point matériel entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées sur celui-ci : - pour en déduire une estimation de la variation de vitesse entre deux instants voisins, les forces appliquées au système étant connues ; - pour en déduire une estimation des forces appliquées au système, le comportement cinématique étant connu. *Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie d'un système modélisé par un point matériel en mouvement pour construire les vecteurs variation de vitesse. Tester la relation approchée entre la variation du vecteur vitesse entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées au système.*

On approche (sans la nommer) la seconde loi de Newton, avec la relation approchée $\overrightarrow{F_{tot}} \approx m \times \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.
Cette approche permet d'exploiter, dès la spécialité de première, les applications de la seconde loi de Newton sans avoir à utiliser la notion de dérivée qui ne sera vue, en physique-chimie, qu'en spécialité de terminale.

En spécialité de Terminale
https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/92/9/spe249_annexe_1158929.pdf

Notions et contenus	**Capacités exigibles - Activités expérimentales support de la formation**
1. Décrire un mouvement	
Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point.	Définir le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps et le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. Établir les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à partir des coordonnées du vecteur position et/ou du vecteur vitesse.

La classe de terminale, en point d'orgue permet d'accéder à la deuxième loi de Newton avec l'étude analytique des mouvements utilisant la dérivée vue en mathématiques en première.
Le travail conduit en physique-chimie se veut cohérent avec l'approche en mathématiques. La construction de la notion de vitesse en physique a pour objectif une approche des lois de Newton. Cette construction est résolument spiralaire :



II - Tracé du vecteur vitesse par une approche de la dérivée telle qu'elle est enseignée en lycée

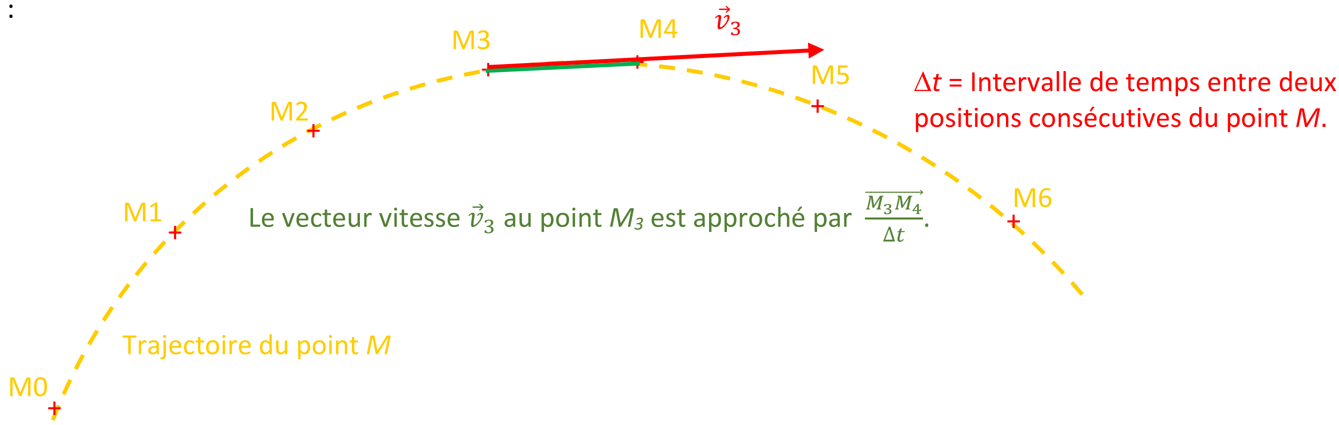
Le programme de seconde de 2019 suggère un changement dans les habitudes de tracé des vecteurs vitesse puisqu'il demande « d'**approcher le vecteur vitesse d'un point à l'aide du vecteur déplacement, où *M* et *M'* sont les positions successives à des instants voisins séparés de Δ*t* ».**

Cette présentation se rapproche de la forme de la définition de la dérivée en mathématiques telle qu'elle est enseignée au lycée à partir de la classe de première.

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et *a* un nombre appartenant à I. Soit *h* un nombre réel non nul tel de *a* + *h* appartient à I. On dit que *f* est dérivable en *a* lorsque le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un unique nombre réel lorsque *h* tend vers zéro. Ce nombre est appelé nombre dérivé de *f* en *a*. on le note *f'(a)*.

D'après un manuel scolaire de mathématiques de 1ère spécialité, 2019

C'est l'analogie formelle avec cette définition mathématique du nombre dérivé qui motive le calcul de la vitesse instantanée en utilisant le « point d'après » en mécanique, puis sa modélisation par un vecteur de la manière suivante :



En effet, les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) \\ v_y(t) \end{cases}$ à l'instant t sont définies à partir de celles du vecteur déplacement de M de coordonnées $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$, entre les instants t et $t + \Delta t$;

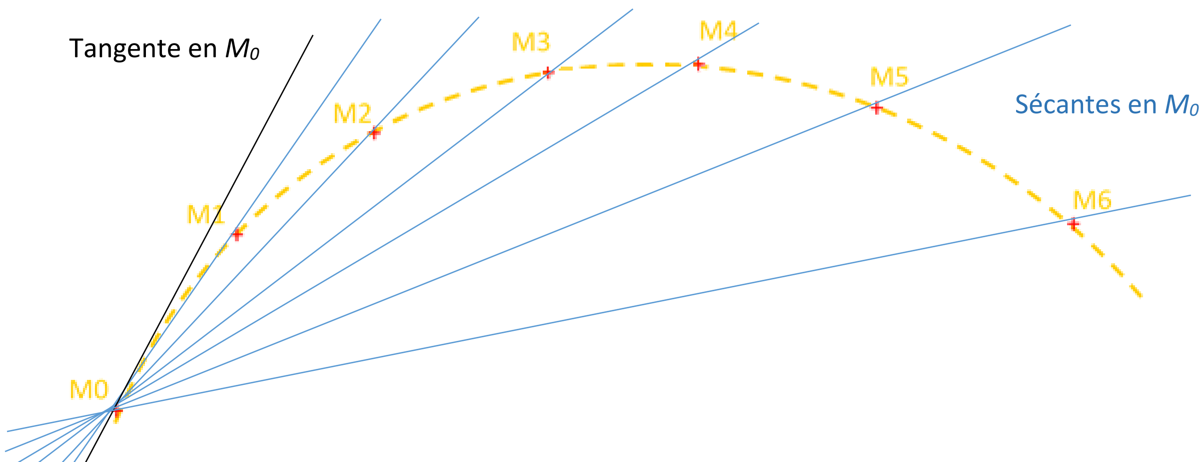
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t} \approx \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t} \text{ dont les coordonnées sont } \vec{v}\begin{cases} v_x(t) \approx \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ v_y(t) \approx \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

Dans cette modélisation, le tracé du vecteur vitesse $\vec{v}_3$ en M_3 est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M_3M_4}$ avec Δt petit face à la durée du mouvement étudié. Cette approche s'appuie sur le taux de variation et sur le nombre dérivé en mathématiques.

Le programme de 1ère spécialité en mathématiques (https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/16/8/spe632_annexe_1063168.pdf) indique en effet que :

> Taux de variation et nombre dérivé gagnent à être illustrés dans des contextes variés :
> - en géométrie, ils représentent la pente d'une sécante et la pente d'une tangente ;
> - en cinématique, on peut interpréter un taux de variation comme une vitesse moyenne et un nombre dérivé comme une vitesse instantanée.
> […] Contenu du point de vue local :
> - Taux de variation. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
> - Nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation. Notation *f'(a).*
> - Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes ».

Il s'agit de comprendre que les sécantes à une courbe en un point donné tendent vers la tangente à la courbe en ce point quand le deuxième point définissant la sécante s'en rapproche (voir la simulation GeoGebra https://www.geogebra.org/m/gsqeppnx) :



III - Tracé du vecteur vitesse par une approche de la dérivée symétrique

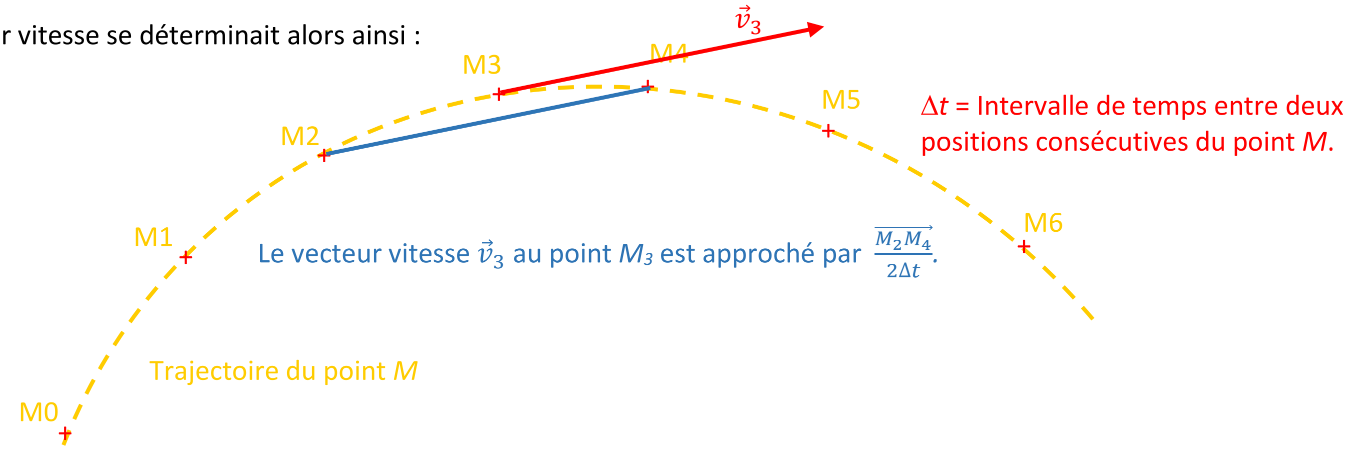
Jusqu'à présent, une autre méthode de calcul de la vitesse instantanée était couramment admise. Pourtant, aucun des programmes des programmes antérieurs n'explicitait le mode opératoire de la méthode utilisée pour tracer le vecteur vitesse en un point.

Programme 2000	
Rien en seconde. En 1ère S :	
Contenus	Connaissances et savoir-faire exigibles
Vecteur vitesse d'un point du solide	Sur un enregistrement réalisé ou donné, déterminer et représenter le vecteur vitesse V d'un point mobile
Accélération : $\overrightarrow{a_G}$ = lim $_{\Delta t \to 0}$ $(\overrightarrow{\Delta v_G}/\Delta t) = d\overrightarrow{v_G}/dt$; vecteur accélération (direction, sens, valeur).	Savoir exploiter un document expérimental [...] déterminer des vecteurs vitesse et accélération.
Commentaire : La mesure approchée de la valeur de la vitesse d'un point est obtenue par le calcul de la valeur de la vitesse moyenne entre deux instants voisins.	

Programme 2010	
Aucune mention du vecteur vitesse en 2nde et 1ère S. En terminale S :	
Notions et contenus	Compétences exigibles
Temps, cinématique et dynamique newtoniennes Description du mouvement d'un point au cours du temps : vecteurs position, vitesse et accélération.	Définir et reconnaître des mouvements (rectiligne uniforme, rectiligne uniformément varié, circulaire uniforme, circulaire non uniforme) et donner dans chaque cas les caractéristiques du vecteur accélération.
Aucune indication sur la manière de tracer les vecteurs vitesse et accélération	

Le choix courant qui avait été fait alors consistait à associer la vitesse à l'instant t à la vitesse moyenne obtenue entre deux instants proches *t*-Δt et *t*+Δt (dérivée dite symétrique) de part et d'autre du point considéré.

Le vecteur vitesse se déterminait alors ainsi :



Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) \\ v_y(t) \end{cases}$ à l'instant *t* étaient définies à partir de celles du vecteur déplacement de M de coordonnées $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$, entre les instants (*t* - Δt) et (*t* + Δt).

$\vec{v} \approx \frac{\overrightarrow{M(t-\Delta t)M(t+\Delta t)}}{2\Delta t}$ dont les coordonnées sont $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) \approx \frac{x(t+\Delta t)-x(t-\Delta t)}{2\Delta t} \\ v_y(t) \approx \frac{y(t+\Delta t)-y(t-\Delta t)}{2\Delta t} \end{cases}$

Dans cette modélisation, le vecteur vitesse $\vec{v}_3$, par exemple, est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M_2M_4}$.
Or, en mathématiques, les fonctions dérivables ne sont pas les mêmes selon la définition de la dérivée que l'on choisit.

Si une fonction *f* admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en *a* (au sens usuel), c'est-à-dire si $\lim\limits_{h>0\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $\lim\limits_{h<0\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existent et sont réelles,
alors, $\lim\limits_{h>0\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ existe et est réelle.
Cette limite est la moyenne de la dérivée à droite et de la dérivée à gauche.
La dérivée symétrique en un point est donc égale à la moyenne de la dérivée à droite et de la dérivée à gauche en ce point (au sens usuel).
Dans le cas d'une fonction dérivable en un point au sens usuel, la dérivée à droite et la dérivée à gauche en ce point existent et sont égales, ainsi la dérivée symétrique est égale à la dérivée au sens usuel en ce point.
Mais si les dérivées à gauche et à droite d'une fonction en un point ne sont pas égales, la fonction est dite non dérivable en ce point au sens usuel, alors qu'elle est dérivable en ce point au sens de la dérivée symétrique.
En conclusion, une fonction dérivable au sens usuel est dérivable au sens symétrique, mais la réciproque est fausse.

Extrait de http://numerisation.univ-irem.fr/WR/IWR09005/IWR09005.pdf

En physique, les fonctions utilisées sont considérées dérivables en tout point. Ce n'est pas le cas en mathématiques. C'est pourquoi, en mathématiques, il est fait une distinction entre deux dérivées.

Le choix d'enseigner, en mathématiques, la dérivée au sens usuel et non la dérivée symétrique est lié au fait que la dérivée symétrique peut exister même en un point où la fonction n'est pas dérivable au sens usuel (pas de tangente).

L'usage de la dérivée au sens usuel en cinématique, proposé par le programme de 2019, va dans le sens d'une meilleure compréhension des élèves du concept de dérivée, pour leur permettre d'établir des liens plus explicites entre les mathématiques et la physique.

IV - Comparaison des deux méthodes concernant le calcul de la valeur de la vitesse

La formule de Taylor-Young (https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/CAPES/analyse/fonctions/Taylor-Young.pdf) permet d'approcher une fonction *f* dérivable *n* fois par une fonction polynômiale d'ordre *n* au voisinage de *x* = *a*.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{Fonction polynôme}} + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{\text{Reste d'ordre n}} \qquad \underbrace{\text{avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0}_{\text{Le reste tend vers 0 quand } x \to a}$$

Exemple à l'ordre 2 :

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{Ordre 0}} + \underbrace{f'(a)\,(x-a)}_{\text{Ordre 1}} + \underbrace{f''(a)\,\frac{(x-a)^2}{2}}_{\text{Ordre 2}} + \underbrace{(x-a)^2\,\varepsilon(x)}_{\text{Reste}} \qquad \text{avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Transposons en physique avec une équation horaire où la variable est le temps t :

$$x(t) = x(t_i) + \frac{dx}{dt}(t_i) \times (t - t_i) + \frac{d^2x}{dt^2}(t_i) \times \frac{(t-t_i)^2}{2} + (t-t_i)^2\,\varepsilon(t) \qquad \text{avec } \lim_{t\to ti} \varepsilon(t) = 0$$

En posant $\Delta t = t - t_i$ on a $t = t_i + \Delta t$. Ainsi :

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \frac{dx}{dt}(t_i) \times \Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}(t_i) \times \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta t^2 \times \varepsilon(t) \quad \mathbf{(1)} \qquad \text{avec } \lim_{t\to ti} \varepsilon(t) = 0$$

On a alors : $\frac{dx}{dt}(t_i) = \frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i)}{\Delta t} - \Delta t \times \left[\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}(t_i) + \varepsilon(t)\right]$

Donc quand on écrit : $v_x(t_i) = \frac{dx}{dt}(t_i) \approx \frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i)}{\Delta t}$ l'erreur est de $\Delta t \times \left[\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}(t_i) + \varepsilon(t)\right]$

L'erreur, proportionnelle à Δt, est d'ordre 1.

Isabelle Tarride IA-IPR Aix-Marseille

Pour calculer la dérivée symétrique et évaluer convenablement l'ordre de l'erreur, il est nécessaire de passer à l'ordre 3.

Alors : $x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \frac{dx}{dt}(t_i)\times\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}(t_i)\times\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{d^3x}{dt^3}(t_i)\times\frac{\Delta t^3}{6} + \Delta t^3\times\varepsilon(t)$ **(1)** (avec $\lim_{t\to ti}\varepsilon(t) = 0$)

Et $x(t_i - \Delta t) = x(t_i) - \frac{dx}{dt}(t_i)\times\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}(t_i)\times\frac{\Delta t^2}{2} - \frac{d^3x}{dt^3}(t_i)\times\frac{\Delta t^3}{6} + \Delta t^3\times\varepsilon'(t)$ **(2)** (avec $\lim_{t\to ti}\varepsilon'(t) = 0$)

La combinaison des équations $\frac{(1)-(2)}{2\Delta t}$ permet d'obtenir :

$$\frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i-\Delta t)}{2\Delta t} = \frac{dx}{dt}(t_i) + \frac{d^3x}{dt^3}(t_i) \times \frac{\Delta t^2}{6} + \Delta t^2\times\left(\frac{\varepsilon(t)-\varepsilon'(t)}{2}\right)$$

Donc quand on écrit : $v_x(t_i) = \frac{dx}{dt}(t_i) \approx \frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i-\Delta t)}{2\Delta t}$ l'erreur est de $\Delta t^2\times\left(\frac{1}{6}\frac{d^3x}{dt^3}(t_i) + \frac{\varepsilon(t)-\varepsilon'(t)}{2}\right)$

L'erreur est proportionnelle à Δt^2, elle n'est donc que d'ordre 2.

Le calcul par la dérivée symétrique est plus précis (erreur d'ordre 2) que par la dérivée au sens usuel (erreur d'ordre 1). C'est d'ailleurs par cette méthode de la dérivée symétrique que sont calculées les dérivées numériques par les calculatrices. Néanmoins, comparé aux erreurs liées aux mesures expérimentales et aux constructions graphiques, cet écart de précision n'est pas significatif.

V - Comparaison des deux méthodes concernant la direction du vecteur vitesse

Pour l'étude de mouvements rectilignes demandée en classe de seconde, la question ne se pose pas mais pour les autres mouvements étudiés en mécanique au lycée comme le mouvement parabolique (chute libre avec vitesse initiale oblique) et le mouvement circulaire, il est intéressant de comparer les deux méthodes.

Intéressons-nous à ces deux types de mouvements.

1- Cas du mouvement parabolique

Dans l'approche du taux de variation usuel en mathématiques (que nous appellerons « méthode du point d'après »), la direction du vecteur vitesse $\vec{v}_i$ au point M_i est celle du vecteur $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$. Ce vecteur n'est pas tangent à la parabole en M_i.

Dans l'approche de la dérivée symétrique, une propriété géométrique de la parabole rend la méthode plus favorable. En effet, dans le cas d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2, la corde $[M_{i-1}M_{i+1}]$ est parallèle à la tangente en M_i.

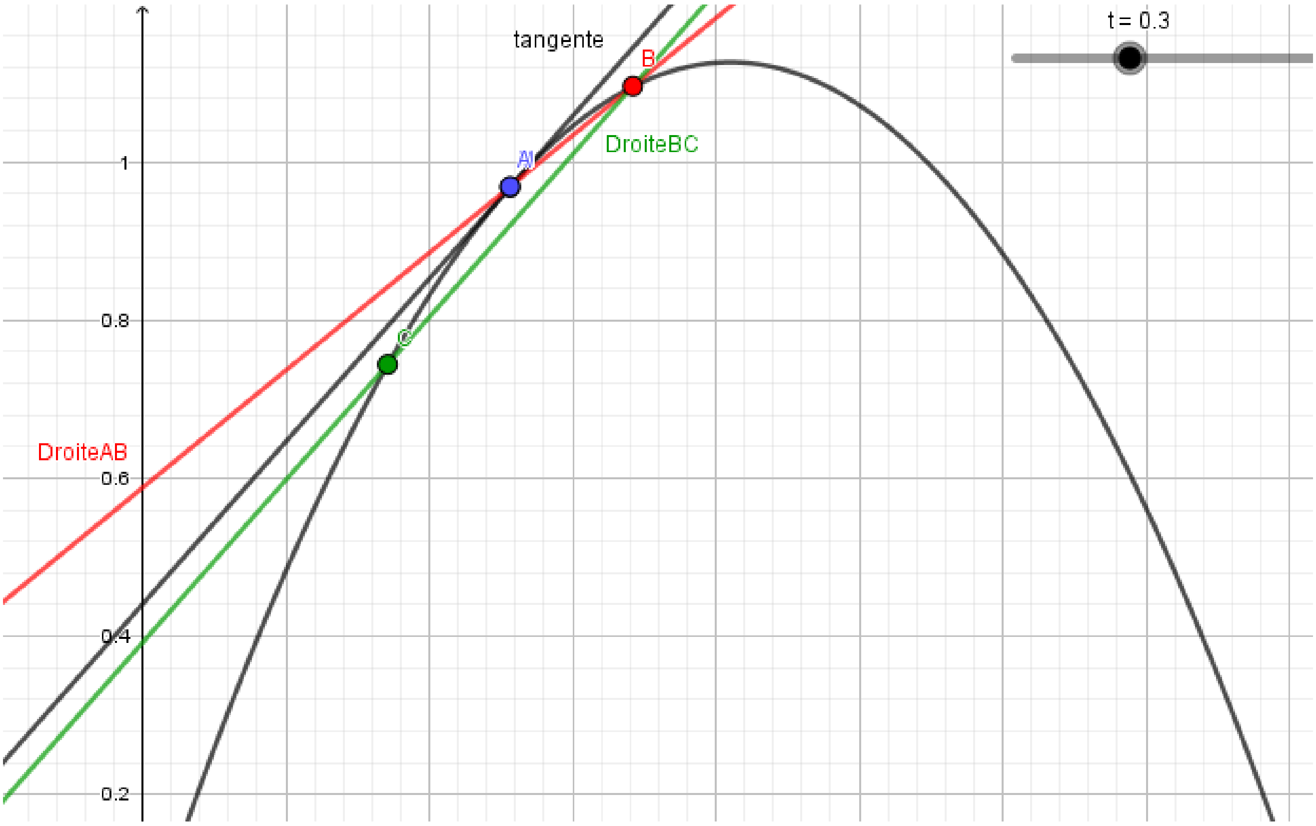
La simulation GeoGebra suivante https://www.geogebra.org/m/ed8hecep permet de visualiser cette propriété. Le fichier ggb est également téléchargeable dans l'onglet « documents » de cet article.

La parabole modélise la trajectoire d'un point matériel lancé avec une vitesse initiale de 5 $m\cdot s^{-1}$ avec un angle de 70° par rapport à l'horizontale dans le champ de pesanteur terrestre :

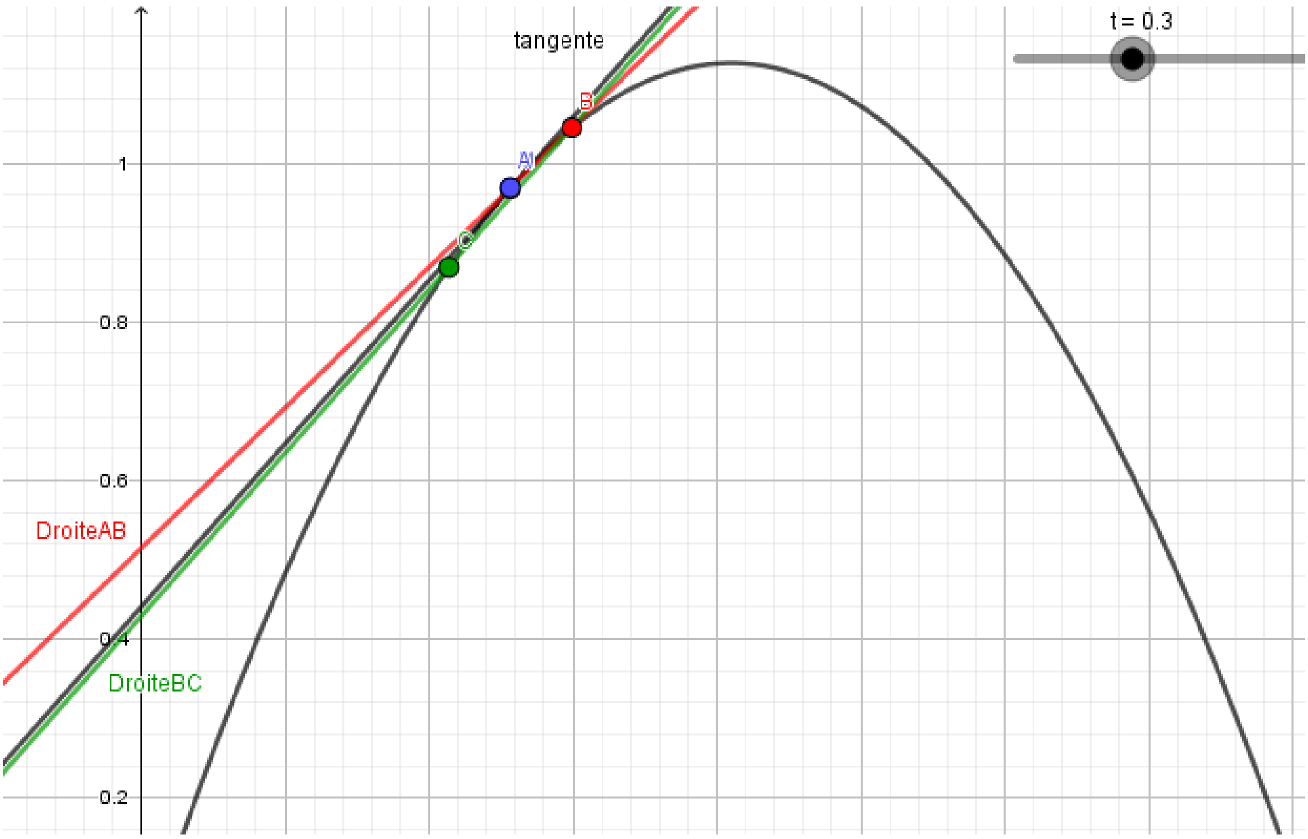
- Choisir la date t avec le curseur. Les points A, B et C se positionnent sur la parabole. A correspond à un point M_i, B à M_{i+i} et C à M_{i-1}.
- La **droite AB** (en rouge) donne la direction du vecteur vitesse par la méthode du « point d'après » ; La **droite BC** (en vert) donne la direction du vecteur vitesse par la méthode de la dérivée symétrique.

Si l'on place le point M en A, la **tangente** à la parabole en *M* vient se positionner en A.

La copie d'écran en page suivante est celle réalisée dans le cas où Δt = 0,1 s :



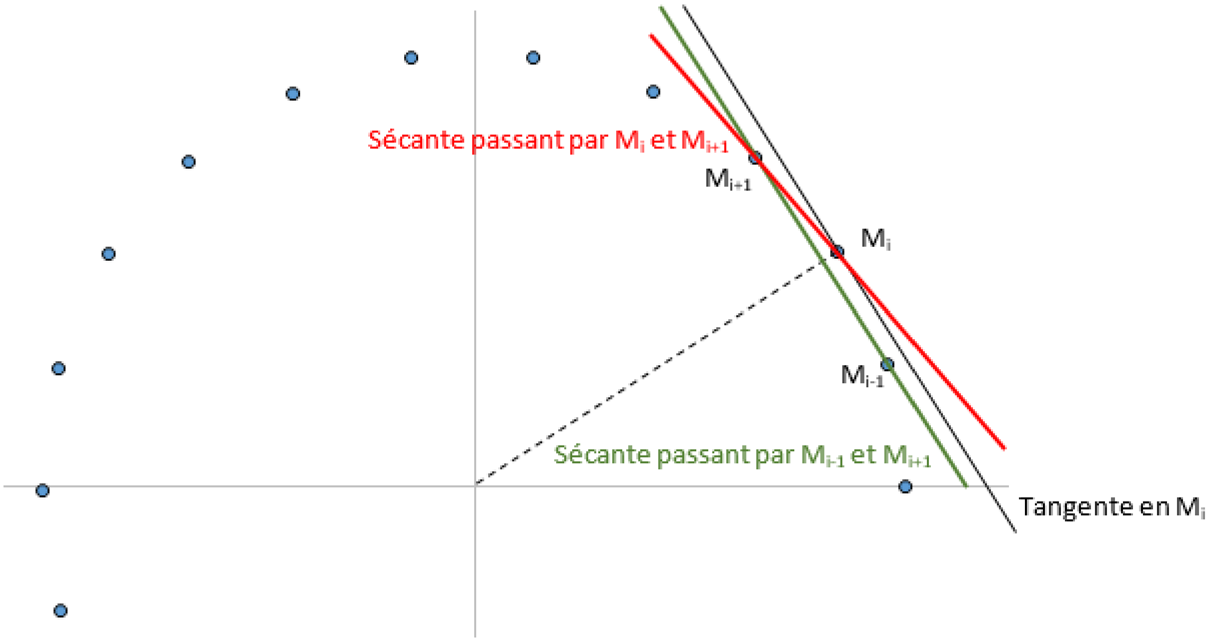
Copie d’écran dans le cas où $\Delta t = 0,05$ s :



On constate que la direction de la **droite BC** (dérivée symétrique) est celle de la **tangente** en A, tandis que la **droite AB** (dérivée « point d’après »), n’a pas tout à fait la même direction. À une date donnée, elle s’en éloigne d’autant plus que Δt est plus grand.

2- Cas du mouvement circulaire uniforme

La direction de la sécante au cercle passant par les points M_{i-1} et M_{i+1} est toujours celle de la tangente au cercle au point M_i du fait des propriétés géométriques du cercle, tandis que la direction de la droite passant par M_i et M_{i+1} n'est pas tangente au cercle en M_i.



3- Conclusion concernant la direction du vecteur vitesse

Dans ces deux cas, la direction du vecteur vitesse obtenue par la méthode du « point d'après » n'est pas celle de la tangente à la courbe au point considéré, tandis que celle obtenue par la méthode de la dérivée symétrique est celle de la tangente à la courbe au point considéré.
Ceci explique le choix qui avait été fait auparavant en physique d'utiliser la méthode de la dérivée symétrique pour déterminer graphiquement le vecteur vitesse. Cette méthode est d'une réelle efficacité, dans le cas d'une trajectoire parabolique ou d'un mouvement circulaire uniforme, mais elle n'est, aux yeux d'un élève qu'un outil.

En effet, que peut comprendre un élève à qui on enseigne, en seconde, cette technique qui ne correspond pas à la représentation de la dérivée en mathématiques alors qu'en physique en terminale, les définitions analytiques s'appuient explicitement sur la dérivée ?

VI - Qu'en est-il de la représentation du vecteur accélération ?

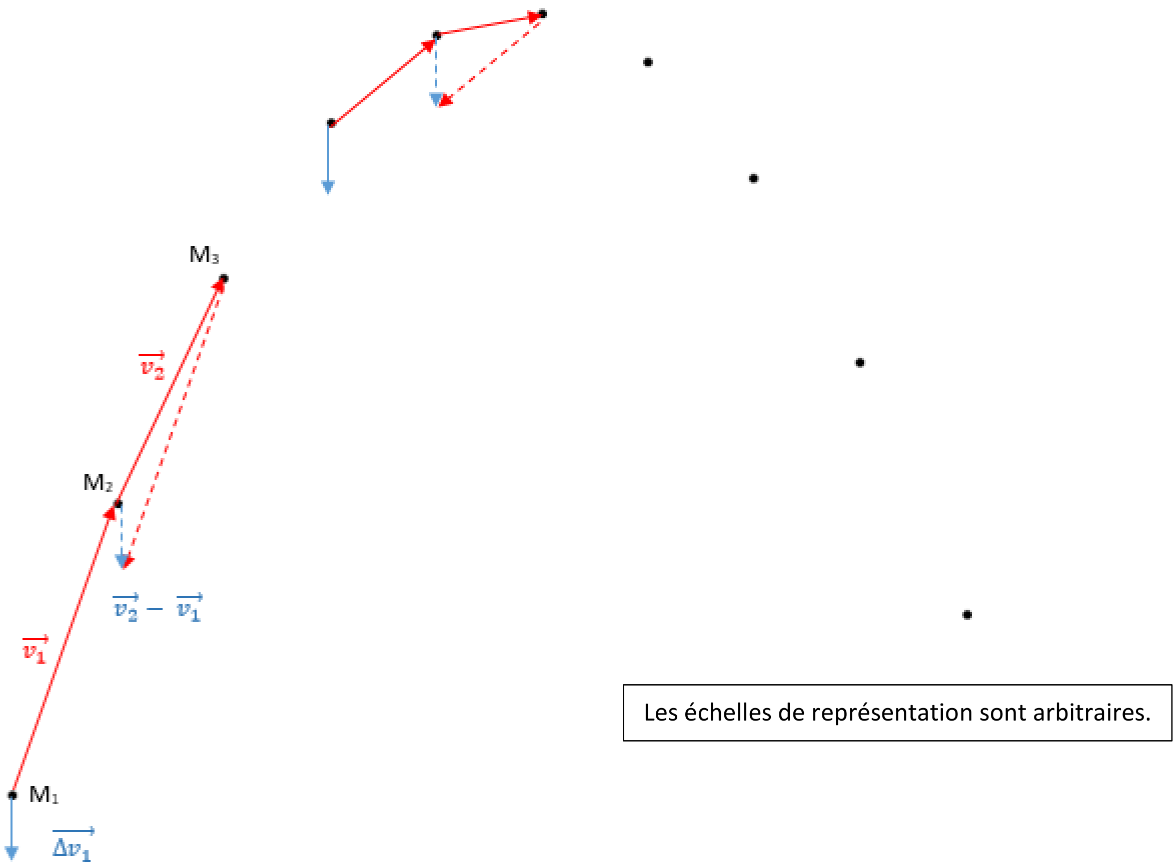
Le vecteur accélération en un point est proportionnel au vecteur variation de vitesse en ce point.

Utilisons cette méthode du « point d'après », pour la représentation des vecteurs accélération :

$$\overrightarrow{v_\iota} = \overrightarrow{v(t_\iota)} = \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \approx \frac{\overrightarrow{OM_{\iota+1}}-\overrightarrow{OM_\iota}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M_\iota M_{\iota+1}}}{\Delta t} \text{ et } \overrightarrow{a_\iota} = \overrightarrow{a(t_i)} = \frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt}(t_i) \approx \frac{\overrightarrow{v(t_\iota+\Delta t)}-\overrightarrow{v(t_\iota)}}{\Delta t}$$

1- Cas du mouvement parabolique

Le mouvement parabolique suivant a été simulé en utilisant les lois de la mécanique. Dans cette situation, on attend un vecteur accélération de même valeur en tout point de la trajectoire et vertical.

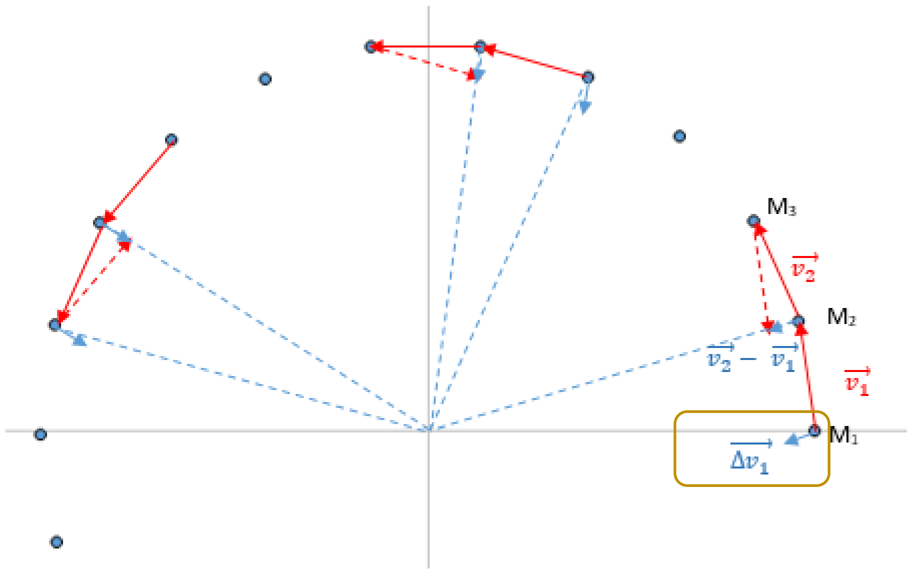


Aux erreurs de construction près, la direction du vecteur accélération est sensiblement verticale. Il a aussi pratiquement la même valeur en tout point. La méthode du « point d'après » conduit à des représentations expérimentales conformes aux attentes.

La construction utilisant cette méthode permet bien de « *Tester la relation approchée entre la variation du vecteur vitesse entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées au système* » dans le cas du mouvement parabolique. Cette compétences est attendue dans le programme de la classe de $1^{ère}$ en enseignement de spécialité : http://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/43/2/spe635_annexe_1063432.pdf .

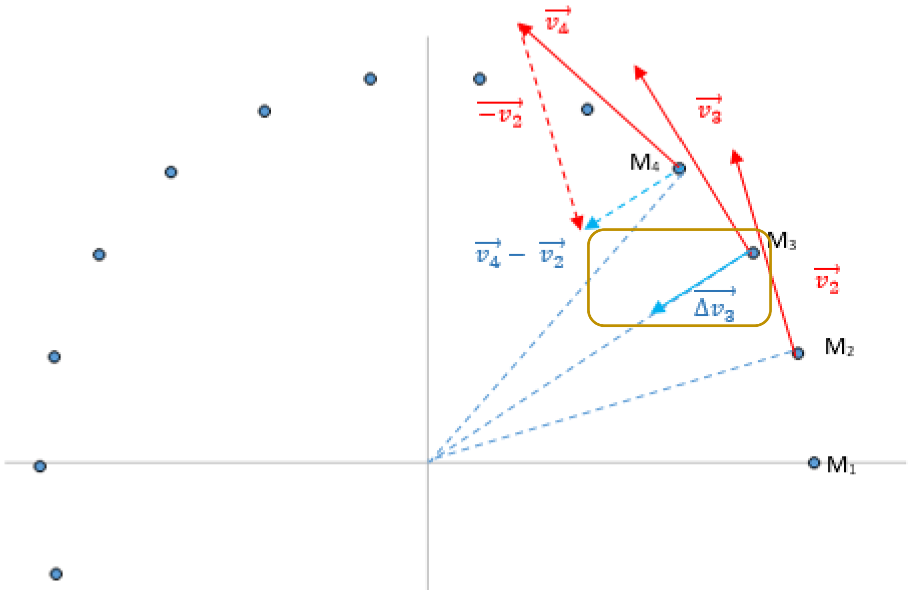
2- Cas du mouvement circulaire uniforme

Le mouvement circulaire uniforme suivant a été simulé. Dans cette situation, on attend une accélération centripète en tout point de la trajectoire.



On constate que le vecteur $\overrightarrow{\Delta v_1} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$ représenté en M_1 n'a pas une direction centripète.

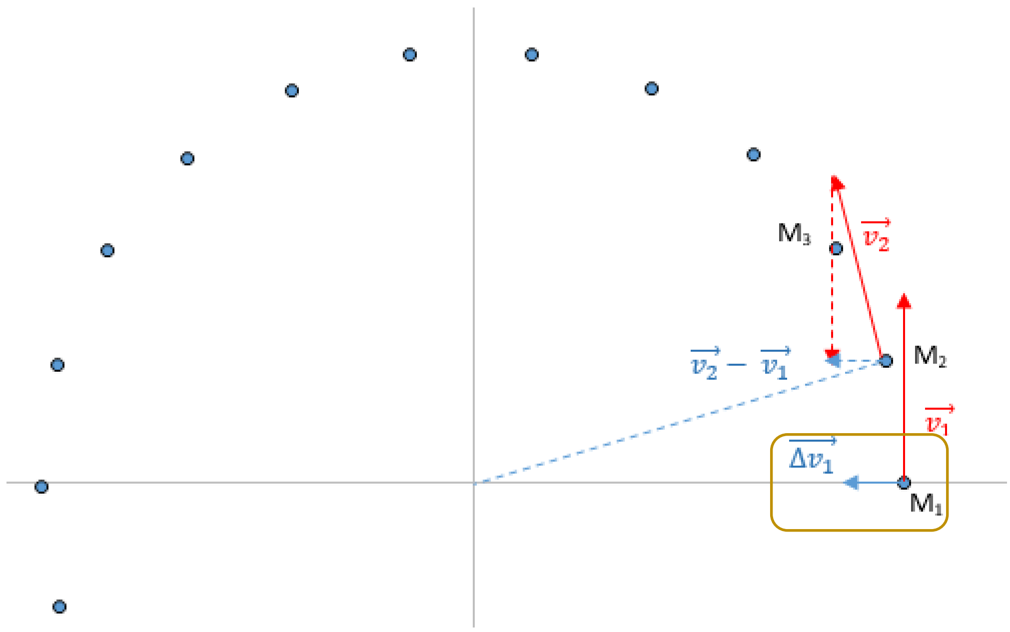
Il n'est donc pas possible, en l'état, de « *Tester la relation approchée entre la variation du vecteur vitesse entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées au système* » en appliquant strictement la méthode du « point d'après » pour le mouvement circulaire uniforme car elle ne conduit pas à des représentations expérimentales conformes aux attentes contrairement à la méthode de la dérivée symétrique (ci-dessous).



Avec la méthode de la dérivée symétrique, les vecteurs vitesse sont, par construction, tangents à la trajectoire au point considéré et les vecteurs variation de vitesse, donc les vecteurs accélération sont centripètes en tout point.

VII - Comment utiliser la méthode du « point d'après » pour le mouvement circulaire uniforme ?

En s'appuyant sur le programme de mathématique de spécialité en classe de première, on peut aisément faire comprendre aux élèves que le vecteur vitesse en un point, approché avec un Δt aussi petit que possible, a pour direction la tangente à la trajectoire au point considéré.
Comme dans le cas du mouvement circulaire uniforme, le vecteur vitesse modélisé par le vecteur déplacement s'écarte de la tangente au cercle au point considéré, il est préférable de représenter le vecteur vitesse selon cette tangente lorsqu'on effectue la mesure en utilisant la méthode du « point d'après ».



La représentation de la mesure du vecteur $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$ selon la direction de la tangente à la trajectoire au point M_i, justifiée par l'approche de la dérivée en mathématiques permet d'obtenir des résultats conformes aux prévisions dans le cas de trajectoires avec des courbures importantes en M_i.

Il est conseillé de faire de même pour des trajectoires chronophotographiées sur lesquelles la sécante $[M_i, M_{i+1}]$ a une direction qui n'est pas assimilable à la tangente à la courbe en M_i. La mesure de la norme du vecteur déplacement $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$ permet d'approcher la valeur de la vitesse selon la relation $\overrightarrow{v_i} \approx \frac{\overrightarrow{M_i M_{i+1}}}{\Delta t}$, sa direction est alors représentée de préférence selon la tangente pour permettre d'obtenir des vecteurs variation de vitesse et accélération conformes aux prévisions.

VIII - Conclusion

Dans tout choix, il y a des gains et des pertes.

Au terme de cette analyse, nous pouvons faire un bilan des avantages et des inconvénients des constructions de vecteurs vitesse et accélération par la méthode « du point d'après » :

Les avantages	Les inconvénients
- Analogie formelle avec la dérivée en mathématiques. - Meilleure cohérence entre le cours de physique et celui de mathématiques. - Transfert grandement facilité pour les élèves. - Constructions des vecteurs variation de vitesse conformes aux attentes pour les mouvements rectilignes et paraboliques. - Possibilité de mesure de la vitesse à l'origine des dates. - Nécessité d'établir un lien avec les mathématiques pour justifier la direction du vecteur vitesse.	- Méthode numériquement moins précise que celle de la dérivée symétrique pour l'estimation de la valeur du vecteur vitesse (écart de précision non significatif comparé aux erreurs liées aux mesures expérimentales et aux constructions graphiques). - Direction du vecteur vitesse non rigoureusement tangente à la trajectoire dans le cas de mouvements non rectilignes. - Direction du vecteur variation de vitesse non conforme aux attentes dans le cas du mouvement circulaire uniforme et plus généralement lorsque la direction de la séante $[M_i, M_{i+1}]$ n'est pas assimilable à la tangente à la courbe en M_i. - Nécessité de justifier le choix d'un tracé tangent à la trajectoire au point considéré, dans ces situations.

La technique de représentation des vecteurs vitesse et variations de vitesse utilisant les propriétés de la dérivée symétrique est indéniablement performante, mais elle présente l'écueil de ne pas être en accord avec l'approche de la dérivée en mathématiques. Ainsi mise en œuvre sans l'appui théorique des mathématiques, elle reste une « technique », qui marche bien, certes, mais à laquelle l'élève ne peut pas donner de sens.

Pour permettre aux élèves de tisser des liens entre les différentes disciplines, de donner du sens aux concepts qu'ils y rencontrent et d'ancrer leurs apprentissages dans une construction cohérente, il convient d'harmoniser le plus possible les langages disciplinaires et de discuter avec les élèves des apports de ce modèle mais aussi de ses limites.

C'est le choix qui a été fait dans le programme de physique-chimie du lycée pour l'approche des notions de vitesse et d'accélération. Rappelons que le programme de spécialité terminale indique bien de « Définir le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps ».

Sommaire